Kubische Interpolation

Polynomfunktionen 3. Grades sind Funktionen, deren Graph einen Wendepunkt hat. Die vier Koeffizienten sind durch vier Bedingungen bestimmt:

Lösung von **Hermite**:
Der Graph des Polynoms wird in jedem Teilintervall durch zwei Punkte und die Tangenten in diesen Punkten so festgelegt, dass die Übergänge knickfrei sind. Für das Polynom gelten also die folgenden Forderungen, die der Einfachheit halber für das Intervall $[x_i, x_{i+1}]$: formuliert werden:
$P(x_0) = y_1$
$P(x_1) = y_1$
$P'(x_0) = y'_0$
$P'(x_1) = y'_1$

Die Lösung vereinfacht sich, wenn das Intervall $[x_0, x_1]$ mit der Breite $h = x_1 - x_0$ linear auf das Intervall [0, 1] abgebildet wird.
Man setzt also $x = x_0 + th$und bestimmt die Koeffizienten des Polynoms Q mit
$Q(t) = P(x_0 + th_i) = at^3 + bt^2 + ct + d$
Wegen
$Q'(t) = h \cdot P(x_0 + th) = 3at^2 + 2bt + c$
gelten die folgenden Bedingungen:
$Q(0) = d = y_0$
$Q(1) = a + b + c + d = y_1$
$Q'(0) = c = hy'_0 = m_0$
$Q'(1) = 3a + 2b + c = hy'_1 = m_1$

Das Gleichungssystem hat die folgenden Lösung:

$a = 2y_0 - 2y_1 + m_0 + m_1$ $c = m_0$	$b = 3y_1 - 3y_0 - m_1 - 2m_0$ $d = y_0$	(1)

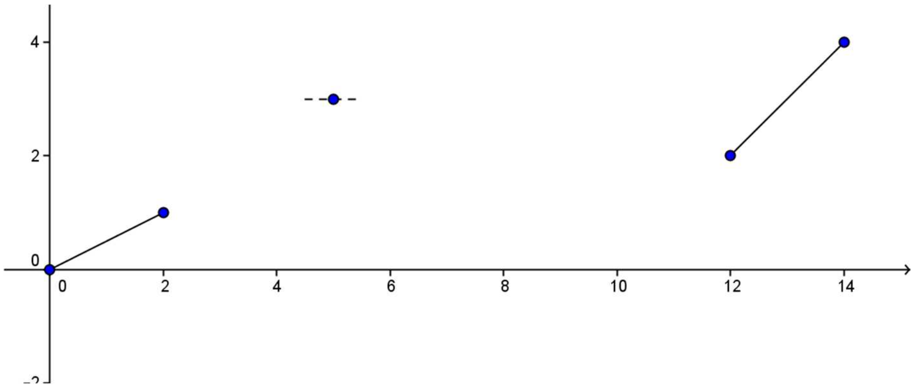
wobei
$m_0 = hy'_0$ und $m_1 = hy'_1$

Mit diesen Formeln können in jedem Teilintervall die Koeffizienten aus den Funktionswerten und Ableitungen an zwei aufeinanderfolgenden Stützstellen berechnet werden. Es ist allerdings noch zu klären, wie allenfalls fehlende Steigungen festgelegt werden können.

Im folgenden Beispiel sind die Steigungen durch die Problemstellung gegeben

Beispiel: Strassenbau

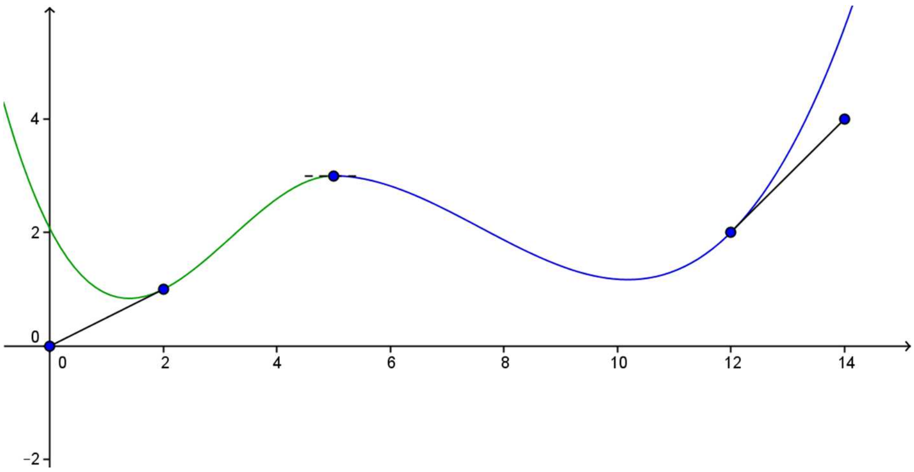
An einigen Stellen ist die Richtung einer kurvenreichen Strasse vorgegeben:



Gesucht ist in den beiden Intervallen [2, 5] und [5, 12] ein Polynom 3. Grades nach Hermite.

Lösung im Intervall [2, 5]:
Variablentransformation: $t = \frac{x-2}{3}$
$h_1 = 3,\ y_0 = 1\ ,\ y_1 = 3 \quad y_0' = \frac{1}{2}\ \ y_1' = 0$
Mit (1) ergeben sich Koeffizienten zu
$a = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 0 = -\frac{5}{2}$
$b = -3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot 0 = 3$
$c = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
$d = 1$
Das Polynom hat damit die Gleichung
$Q_1(t) = -\frac{5}{2}t^3 + 3t^2 + \frac{3}{2}t + 1$
Macht man die Substitution rückgängig und ersetzt t durch $\frac{x-2}{3}$ so erhält für das Intervall [2, 5] das Polynom mit der Gleichung
$P_2(x) = -\frac{5}{54}x^3 + \frac{8}{9}x^2 - \frac{35}{18}x + \frac{56}{27}$

Lösung im Intervall [5, 12]:
Variablentransformation: $t = \frac{x-5}{7}$
$h_2 = 7,\ y_1 = 3\ ,\ y_2 = 2 \quad y_1' = 0\ \ y_2' = 1$
Mit (1) ergeben sich entsprechend die Koeffizienten zu
$a = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 + 7 \cdot 0 + 7 \cdot 1 = 9$
$b = -3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 7 \cdot 0 - 7 \cdot 1 = -10$
$c = 7 \cdot 0 = 0$
$d = 3$
Das Polynom hat damit die Gleichung
$Q_2(t) = 9t^3 - 10t^2 + 3$
Macht man die Substitution rückgängig und ersetzt t durch $\frac{x-5}{7}$ so erhält für das Intervall [5, 12] das Polynom mit der Gleichung
$P_2(x) = \frac{9}{343}x^3 - \frac{205}{343}x^2 + \frac{1375}{343}x - \frac{1846}{343} \approx 0.0262\,x^3 - 0.598\,x^2 + 4.01\,x - 5.38$



Übungsaufgabe:
Bei einem Auto, das eine gerade Strasse entlang fährt, werden an einigen Stellen die Zeit und die Geschwindigkeit erfasst. In der folgenden Tabelle sind die Zeit (in Sekunden), die Entfernung (in Meter) und die Geschwindigkeit (in Meter pro Sekunde) angegeben.

Zeit x	0	3	5	8	13
Entfernung s	0	68.6	116.7	189.9	302.7
Geschwindigkeit v	22.9	23.5	24.4	22.6	21.9

Mit einem Hermite'schen Polynom ist die maximale Geschwindigkeit vorauszusagen.

Lösung (jg):
Da $Q'(t)$ die Geschwindigkeit angibt, erfüllt die maximale Geschwindigkeit die Bedingung $Q''(t) = 0$.

Intervall [3, 5] $\qquad t = \frac{x-3}{2}$

$Q_2(t) = -0.4t^3 + 1.5t^2 + 47.0t + 68.6$

$Q_2'(t) = -1.2t^2 + 3t + 47$

$Q_2''(t) = -2.4t + 3 = 0$

$t = {}^5/_4$ (ausserhalb des Intervalls)

Intervall [5, 8] $\qquad t = \frac{x-5}{3}$

$Q_3(t) = -5.4t^3 + 5.4t^2 + 73.2t + 116.7$

$Q_3'(t) = -16.2t^2 + 10.8t + 73.2$

$Q_3''(t) = -32.4t + 10.8t = 0$

$t = {}^1/_3$ oder wegen $x = 3t + 5$ ist $x = 6$

Wegen $P_3(x) = Q_3(t)$ ist $P_3(6) = Q({}^1/_3) = 141.5$

und wegen $P_3'(x) = \frac{Q_3''(t)}{h_3} \quad P_3'(6) = \frac{Q_3''\left(\frac{1}{3}\right)}{3} = 25.0$

Das Auto erreicht also in diesem Intervall nach 6s in einer Entfernung von 141.5 m die Maximalgeschwindigkeit v = 25.0 m/s.

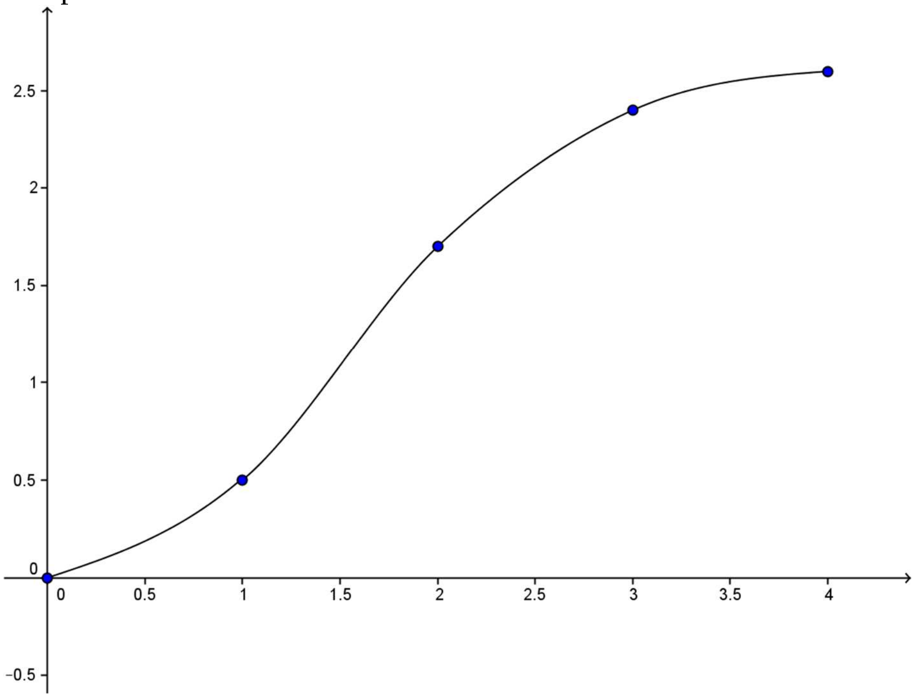
Sind die Ableitungen nicht durch die Problemstellung vorgegeben, dann können sie wie im folgenden Beispiel durch die Sekantensteigung zwischen zwei Nachbarpunkten angenähert werden, an den Rändern durch die Forderung, dass die Krümmung verschwindet .

Bestimmung der Ableitungen in den inneren Punkten:
$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$
Randebedingungen:
Wegen $Q''(t) = 6at + 2b$
Gilt:

$$Q''(0) = 2b = 2 \cdot (b = 3y_1 - 3y_0 - m_1 - 2m_0) = 0$$

Oder also
$2m_0 = 3y_1 - 3y_0 - m_1$
$m_0 = \frac{3}{2} \cdot (y_1 - y_0) - \frac{1}{2} m_1$
und entsprechend
$m_n = \frac{3}{2} \cdot (y_n - y_{n-1}) - \frac{1}{2} m_{n-1}$

Beispiel Schiffsbau nach Hermite



Schiffsrumpf mit Hermite h = 1

xi	0	1	2	3	4
yi	0	0.5	1.7	2.4	2.6

$$m_0 = \frac{3}{2} \cdot (y_1 - y_0) - \frac{1}{2} m_1 \qquad y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \qquad m_n = \frac{3}{2} \cdot (y_n - y_{n-1}) - \frac{1}{2} m_{n-1}$$

m0	m1	m2	m3	m4
0.325	0.85	0.95	0.45	0.075

$$a = 2y_0 - 2y_1 + m_0 + m_1$$
$$b = 3y_1 - 3y_0 - m_1 - 2m_0$$
$$c = m_0$$
$$d = y_0$$

	a	b	c	d	Substitution
Intervall[0, 1]	0.175	0	0.325	0	t = x
Intervall[1, 2]	-0.6	0.95	0.85	0.5	t = (x - 1)
Intervall[2, 3]	0	-0.25	0.95	1.7	t = (x -2)
Intervall[3, 4]	0.125	-0.375	0.45	2.4	t = (x - 3)

nach der Variablentransformation

Intervall[0, 1]	$P_1(x) = 0.175x^3 + 0.325x$
Intervall[1, 2]	$P_2(x) = -0.6x^3 + 2.75x^2 - 2.85x + 1.2$
Intervall[2, 3]	$P_3(x) = -0.25x^2 + 1.95x - 1.2$
Intervall[3, 4]	$P_4(x) = 0.125x^3 - 1.500x^2 + 6.075x - 5.700$

Nachteil:
An den Stützstellen wechselt i.a. der Krümmungsradius, Dieser Nachteil wird behoben durch die im folgenden Abschnitt besprochene Spline-Interpolation.