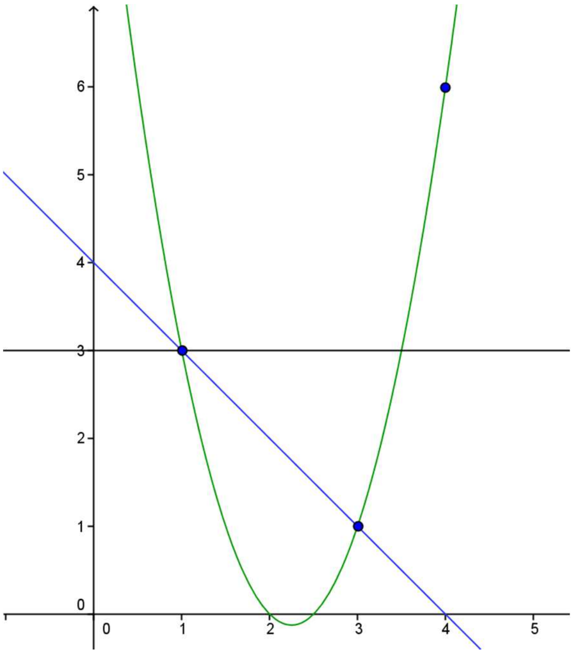
2. Globale Interpolation

2.1 Interpolation nach Newton

Beispiel:
(1, 3), (3, 1), (4, 6)



Idee:
Schrittweise werden ergänzt, welche die bisherigen Stützwerte nicht verändern.

$f_0(x) = 3$
$f_1(x) = 3 + a_1(x-1)$
Beachte: Der zweite Summand liefert an der Stelle 1
keinen Beitrag.
$f_1(3) = 3 + a_1(3-1) = 1 \qquad a_1 = -1$
$f_2(x) = 3 - (x-1) + a_2(x-1)\cdot(x-3)$
$f_2(4) = 3 - (4-1) + a_2(4-1)\cdot(4-3) = 6$
$a_2 = 2$

$f_2(x) = 3 - (x-1) + 2(x-1)\cdot(x-3) = 2x^2 - 9x + 10$

Das Interpolationspolynom ergibt für x-Werte, die von den Stützstellen verschieden sind, plausible Zwischenwerte also etwa an der Stelle 2:
$f_2(2) = 2\cdot 2^2 - 9\cdot 2 + 10 = 0$

Satz:
Es existiert genau ein Polynom vom Grad ≤ n, welches an den vorgegebenen n + 1 verschiedenen Stützstellen x_i vorgegebene Wert y_i annimmt.

Allgemeiner Ansatz:
$f(x) = y_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)\cdot(x-x_1) + a_3(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2) + \dots$

Beweis des Satzes:
Da das nach dem Newtonverfahren ermittelte Polynom die geforderten Eigenschaften besitzt, hat das Problem mindestens eine Lösung.
Das Problem hat aber auch höchstens eine Lösung: Gäbe es nämlich ein weiteres Polynom g von höchstens n-tem Grad, dann wäre die Differenz f – g ebenfalls ein Polynom von höchstens n-tem Grad mit den n + 1 Nullstellen x_0, x_1, x_n also wäre f – g die Konstante 0 und damit f = g.

Bemerkung:
Die Koeffizienten können auch direkt mit dem sogenannten Differenzenschema bestimmt werden.

Vorteil dieses Verfahrens:
Tritt ein weiterer Stützpunkt dazu, dann kann das bisherige Interpolationspolynom ergänzt werden.

Bemerkung:
Das Problem wurde bereits im Grundkurs gelöst. Die Koeffizienten eines Polynoms ergaben sich damals mit dem Gaussalgorithmus als Lösungen eines linearen Gleichungssystems mit n + 1 Unbekannten und n + 1 Gleichungen.

Beispiel:
Mit dem Ansatz
$f(x) = ax^2 + bx + c$
ergibt sich das Gleichungssystem

$$\left| \begin{matrix} a & +b & +c = 3 \\ 8a & +3b & +c = 1 \\ 16a & +4b & +c = 6 \end{matrix} \right|$$

oder in Matrizenform

$$\left| \begin{matrix} 1 & 1 & 1|3 \\ 8 & 3 & 1|1 \\ 16 & 4 & 1|6 \end{matrix} \right|$$

Mit dem Gaussalgorithmus kann die Matrix in Dreiecksform gebracht werden:

$$\left| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 | & 3 \\ 0 & -6 & -8| & -26 \\ 0 & 0 & 1 | & 10 \end{matrix} \right|$$

Womit sich die Lösungen durch Rückwärtseinsetzen ergeben zu
a = 2, b = -9 und c = 10

Variante:
Die Lösungen lassen sich in der folgenden Diagonalform direkt herauslesen:

$$\left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 | & 2 \\ 0 & 1 & 0 | & -9 \\ 0 & 0 & 1 | & 10 \end{matrix} \right|$$

Übungsaufgabe:
Bestimme mit dem PC für die Daten des Musterbeispiels die Gleichung des Interpolationspolynoms und stelle es grafisch dar.