Potenzreihen

1. Einleitung

In diesem Kapitel geht es um die Darstellung von Funktionen durch unendliche Reihen, sogenannte Potenzreihen (Taylorreihen, McLaurin-Reihen). Bricht man die Reihe nach endlich vielen Summanden ab, so erhält man
Näherungswerte für Konstanten wie z.B. e, π oder
Näherungen für Funktionswerte wie z.B. sin(15°), ln 2 oder
Näherungsformeln für die Verdopplungszeit τ bei einem exponentiellem Wachstum von p %
nämlich $\tau \approx \frac{70}{p}$?

Ausserdem können Grenzwerte wie z.B. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ bestimmt werden.

Zunächst werden im folgenden Abschnitt die Begriffe Folgen und Reihen repetiert.

2. Zahlenfolgen und Reihen

Einführende Beispiele:
a)
Addiert man die ersten n Glieder der geometrischen Folge $a_k = a_1 q^{k-1}$ so erhält man die zugehörige Reihe (Teilsummenfolge, Partialsummenfolge) $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad q \neq 1$

Für $|q| < 1$ konvergiert die nichtabbrechende geometrische Reihe mit dem Summenwert

$s = \frac{a_1}{1 - q}$

Im Fall $a_k = 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$ erhält man $s = \frac{3}{1 - \frac{1}{4}} = 4$

b)
Addiert man die n ersten Glieder der (nicht geometrischen) Folge $a_k = \frac{1}{k \cdot (k+1)}$ so erhält man die zugehörige Reihe $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

(Beweis durch vollständige Induktion) mit dem Grenzwert $s = \lim\limits_{n \to \infty} s_n = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

Die Zahl s heisst bekanntlich Grenzwert der Folge s_n, wenn die Folgenglieder s_n der Zahl s schliesslich beliebig nahe kommen bzw.

Definition:
Die Zahl $s \in R$ heisst Grenzwert (Limes) der Folge (s_n), wenn es zu jeder (noch so kleinen) Zahl ε > 0 eine von ε abhängige natürliche Zahl N(ε) gibt, sodass gilt:
$|s_n - s| < \varepsilon$ für alle n > N(ε)

Allgemein:
Unter einer unendlichen Reihe versteht man formal die folgende Summe

$a_1 + a_2 + a_3 + ...+ a_k + ... = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Die Summe s_n der ersten n Glieder der Zahlenfolge a_k heisst Partialsummenfolge s_n der unendlichen Reihe. Um die Konvergenz der unendlichen Reihe abzuklären, untersucht man die zugehörige Partialsummenfolge. Eine unendliche Reihe heisst konvergent, wenn die Partialsummenfolge s_n einen Grenzwert hat, andernfalls divergent.
Existiert der Grenzwert der Partialsummenfolge so heisst dieser "Summenwert" der unendlichen Reihe.

Beispiele:

Die harmonische Reihe ist (bestimmt) divergent
Die Summe der natürlichen Zahlen ist divergent

Die geometrische Reihe ist konvergent für $|q| < 1$ und hat den Summenwert $s = \frac{a_1}{1-q}$