5.5 Tangensreihe

Wegen der Grundbeziehung $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ oder umgeformt $\sin x = \cos x \cdot \tan x$
kann die Tangensreihe auf die Sinus- bzw. Cosinusreihe zurückgeführt werden.
Da der Graph der Tangensfunktion punktsymmetrisch zum Nullpunkt ist, kommen in der Tangensreihe nur ungerade Exponenten vor, womit sich der Ansatz vereinfachen lässt.

$$\sin x = \cos x \cdot \left(a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \ldots\right)$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) \cdot \left(a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \ldots\right) =$$

$$a_1 x + (a_3 - \tfrac{1}{2!} a_1) \cdot x^3 + \left(a_5 - \tfrac{1}{2!} a_3 + \tfrac{1}{4!} a_1\right) \cdot x^5 + \ldots$$

Die beiden Seiten stimmen genau dann für alle x überein, wenn für jede Potenz von x die Koeffizienten übereinstimmen (sogenannter Koeffizientenvergleich).

x:	$1 = a_1$	$a_1 = 1$
x^3:	$-\tfrac{1}{3!} = a_3 - \tfrac{1}{2!} a_1$	$a_3 = \tfrac{1}{3}$
x^5:	$\tfrac{1}{5!} = a_5 - \tfrac{1}{2!} a_3 + \tfrac{1}{4!} a_1$	$a_5 = \tfrac{2}{15}$

...

Damit gilt für die

Tangensreihe

$$\boxed{\tan x = x + \tfrac{1}{3} x^3 + \tfrac{2}{15} x^5 + \ldots} \qquad |x| \le \tfrac{\pi}{2}$$

Übungsaufgaben:
Es sind die Potenzreihen der folgenden Funktionen herzuleiten:
a)

$$f(x) = \frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \cdots$$

b)

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = x - \tfrac{1}{3} x^3 + \tfrac{2}{15} x^5 \mp \ldots$$ **Tangenshyperbolicus**

Bemerkung:
Vergleiche dazu die Anwendung beim freien Fall mit Luftwiderstand.