5.4 Die Binomialreihe

Die Herleitung erfolgt über die Ableitungen

$f(x) = (1+x)^s \qquad f(0)=1$

$f'(x) = s \cdot (1+x)^{s-1} \qquad f'(0)=s$

$f''(x) = s \cdot (s-1) \cdot (1+x)^{s-2} \qquad f''(0) = s \cdot (s-1)$

$f'''(x) = s \cdot (s-1) \cdot (s-2) \cdot (1+x)^{s-3} \qquad f'''(0) = s \cdot (s-1) \cdot (s-2)$

Die Koeffizienten der Binomialreihe heissen Binomialkoeffizienten

$$\binom{s}{k} = \frac{s \cdot (s-1) \cdot (s-2) \cdot (s-3) \ldots (s-k+1)}{k!}$$

Im Zähler und Nenner stehen je k Faktoren

Binomialreihe

$$\boxed{(1+x)^s = 1 + \binom{s}{1} x + \binom{s}{2} x^2 + \binom{s}{3} x^3 + \ldots \qquad |x| < 1}$$

Konvergenzradius r = 1

Ist s eine natürliche Zahl, so bricht die Potenzreihe nach s + 1 Summanden ab ($\rightarrow$Binomischer Lehrsatz).
Ist s keine natürliche Zahl, so ist die Reihe nicht abbrechend.

Beispiele:
a)

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - + \ldots \ldots \qquad |x| < 1$$

b) Tipp: Substitution $z = -x^2$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1 + \left(-x^2\right)\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \tfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \ldots \qquad |x| < 1$$

Übungsaufgabe:
Gesucht ist die Potenzreihenentwicklung der folgenden Funktion

$$f(x) = \sqrt{x+4} = 2 \cdot \left(1 + \frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

.
Lösung:

$$f(x) = \sqrt{x+4} = 2 \cdot \left(1 + \frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 2 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{64} + \frac{x^3}{512} - + \cdots$$