5.6 Logarithmusreihe

Bei diesem Beispiel wird verwendet, dass eine Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzbereiches gliedweise differenziert und integriert werden kann. Die neuen Potenzreihen haben denselben Konvergenzradius wie die ursprüngliche Reihe.

Aus der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - + \ldots \qquad |t| < 1$$

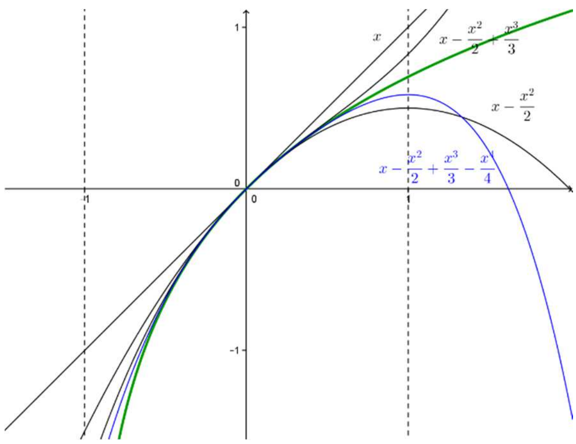
erhält man durch bestimmte Integration die folgende Entwicklung von ln(1 + x)

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x) - \ln 1 = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots$$

Logarithmusreihe

$$\boxed{ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots.} \qquad |x| < 1$$

Bemerkung:
Diese Reihe kann auch durch Berechnung der Koeffizienten aus den Ableitungen hergeleitet werden.



Da die Reihe auch für x = 1 konvergiert, ergibt sich die bereits erwähnte Reihenentwicklung für ln 2:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \ldots$$

alternierende harmonische Reihe

Die sehr langsame Konvergenz kann folgendermassen verbessert werden:

Man ersetzt dazu in der Logarithmusreihe

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

die Variable x durch –x und erhält:

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad |x| < 1$$

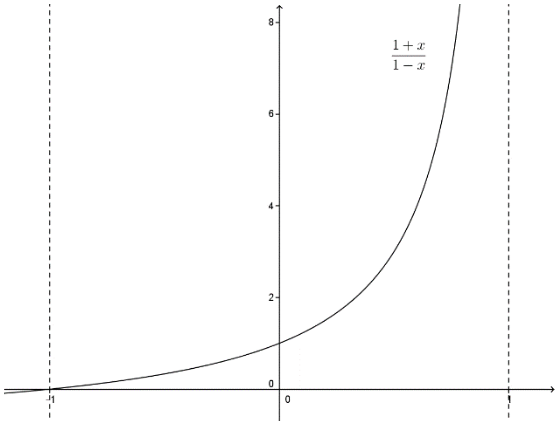
Subtraktion der beiden Reihen ergibt:

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2 \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots \right)$$

Division durch 2 und Anwendung des Logarithmengesetzes $\ln x^k = k \cdot \ln x$ liefert:

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots \qquad |x| < 1$$

Da die Funktion $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$ für $|x|<1$ alle positiven Werte annimmt, ermöglicht diese Reihe die Berechnung beliebiger Logarithmen, wie das folgende Beispiel zeigt.



Beispiel:

Ist etwa ln 2 zu berechnen, so bestimme x so, dass $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=2$ gilt. Mit der Lösung x = $^3/_5$ berechnet sich ln 2 zu

$$\ln 2=\frac{3}{5}+\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^3}{3}+\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^5}{5}+\ldots\approx 0.69\,.$$

Übungsaufgaben:

a)
Welche neue Reihenentwicklung ergibt sich, wenn man die folgende geometrische Reihe differenziert?

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots \qquad |x|<1$$

b)
Welche Reihe ergibt sich, wenn man in der Logarithmusreihe x = $-^1/_2$ setzt und das Vorzeichen ändert?

Lösung:
a)

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\ldots \qquad |x|<1$$

b)

$$\ln 2=\frac{1}{2^1\cdot 1}+\frac{1}{2^2\cdot 2}+\frac{1}{2^3\cdot 3}+\frac{1}{2^4\cdot 4}+\ldots$$

5.7 Die Arcustangensreihe

Sie kann aus der folgenden geometrischen Reihe hergeleitet werden:

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + - \dots \qquad |t| < 1$$

Gliedweise Integration ergibt

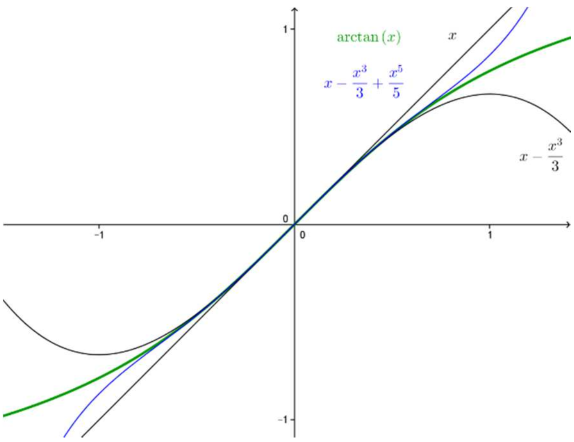
$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(1 - t^2 + t^4 - t^6 + - \dots\right) dt$$ und damit

Arcustangensreihe

$$\boxed{\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \dots} \qquad |x| < 1$$

Wegen $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ bzw. $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ gilt die folgende allerdings sehr langsam konvergierende Reihenentwicklung

$$\pi = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots\right)$$



Das ist die so genannte Leibniz'sche Reihe für π (Gottfried W. Leibniz 1646 – 1716)

Eine verbesserte Reihenentwicklung kann folgendermassen erhalten werden:
Wählt man x und y zwischen 0 und $\pi/2$ so, dass gilt tan x = ½ und tan y = $^1/_3$ dann wird nach dem Tangenstheorem

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = 1$$ also gilt: $x + y = \frac{\pi}{4}$ also wegen

$$x = \arctan\tfrac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - + \dots$$

$$y = \arctan\tfrac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - + \dots$$ schliesslich

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - + \dots\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - + \dots\right)$$

Das ist die Eulersche Reihe für π (nach Leonhard Euler 1707 – 1783)

Übungsaufgabe
Es gilt:
$$\frac{\pi}{6} = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$$
oder
$$\pi = 6 \cdot \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$$
Welche Reihenentwicklung ergibt sich damit für die Kreiszahl?
$$\pi = 6 \cdot \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4} - \, + \cdots\right)$$

Übungsaufgabe:
Berechne die Reihenentwicklungen des hyperbolischen Sinus bzw. Cosinus durch Addition der Mac Laurinreihen von e^x und e^{-x}.

Lösung:
$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad r = \infty \text{ bzw.}$$
$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... \qquad r = \infty$$
Beachte die Analogie zu der Sinus- bzw. Cosinusreihe!

Zusammenfassung:
Die Reihenentwicklung einer Funktion kann auf verschiedene Arten bestimmt werden:
- durch die i.a. rechenaufwändige Berechnung der Koeffizienten aus den Ableitungen
- indem in bekannten Reihen die Variable x durch eine andere ersetzt wird
- indem man gegebene Reihen addiert, subtrahiert, multipliziert
- indem man gegebene Reihen differenziert oder integriert
- als Spezialfälle der geometrischen Reihe
- durch Potenzreihenansatz und Koeffizientenvergleich.