6. Berechnung des Konvergenzradius

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert eine Reihe, wenn ihre Folgenglieder die Bedingung

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| < 1$$

erfüllen. Wendet man dieses Kriterium auf die Potenzreihe an, so ergibt sich daraus

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}x^{k+1}}{a_k x^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}x}{a_k}\right| = |x|\cdot\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$$

Löst man diese Ungleichung nach $|x|$ auf, so erhält man schliesslich

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|} = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = r$$ und damit das folgende

Ergebnis:

Der Konvergenzradius r einer Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ wird nach der Formel

$r = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ berechnet. Die Reihe konvergiert für $|x|$ < r und divergiert für $|x|$ > r.

Eine Aussage über das Konvergenzverhalten für x = r bzw. x = - r bedarf weiterer Untersuchungen.

Beispiel:

Für die Exponentialreihe erhält man

$$r = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k\to\infty}(k+1) = \infty$$

Die Exponentialreihe ist also für allen reellen x konvergent.