7.4 Berechnung von Grenzwerten nach Bernoulli-Hopital

Es handelt sich um eine Methode, Grenzwerte von rationalen Ausdrücken der Form f(x)/g(x) zu berechnen, wenn f(0) = g(0) = 0 gilt.
Für f und g gelten die folgenden Mac Laurin-Entwicklungen:

$$f(x) = f(0) + x \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2} \cdot f''(\vartheta_1 x) = x \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2} \cdot f''(\vartheta_1 x)$$

und

$$g(x) = f(0) + x \cdot g'(0) + \frac{x^2}{2} \cdot g''(\vartheta_2 x) = x \cdot g'(x) + \frac{x^2}{2} \cdot g''(\vartheta_2 x)$$

Da der Faktor x gekürzt werden kann, gilt damit die so genannte **L´Hopital´sche Regel**

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(f'(0) + \frac{x}{2} \cdot f''(\vartheta_1 x)\right)}{\lim\limits_{x\to 0}\left(g'(0) + \frac{x}{2} \cdot g''(\vartheta_2 x)\right)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

Beispiele:
a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^0}{1} = 1$$

hin und wieder muss die Regel mehrmals angewendet werden:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2}$$

allenfalls ist der Term umzuformen:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x}{x \cdot \sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cdot \cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin x}{2\cos x - x \cdot \sin x}\right) = 0$$

Der Satz gilt sinngemäss auch für eine beliebige Stelle x_0, wenn $f(x_0) = g(x_0) = 0$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} = 0$$

Übungsaufgaben:
a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \sin x}{1 - \cos(2x)}$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin(2x)}{x^3}$$

c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - x\cos x}{x - \sin x}$$

Lösungen:
a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{4}{3}$ c) 3