8.4 Die „aufgehängte Erdkugel“

Aufgabe
Man denkt sich um den Äquator der Erde eine Schnur gelegt und verlängert diese um einen Meter.

a) Mit dieser Schnur bildet man einen neuen Kreis. Wie gross ist die Radiuszunahme?

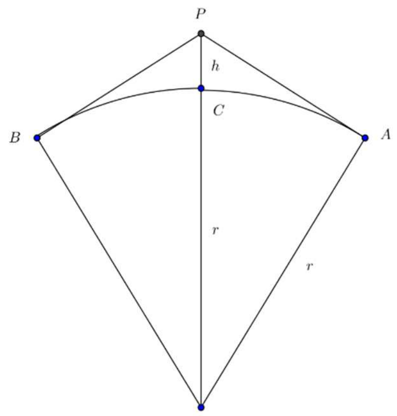
	Radius		Umfang in Meter
vorher	r	$\xrightarrow{\cdot 2\pi}$	2πr
nachher	$R=\frac{2\pi r+1}{2\pi}=r+\frac{1}{2\pi}$	$\xleftarrow{\cdot\frac{1}{2\kappa}}$	2πr + 1

Die Radiuszunahme $\frac{1}{2\pi}$ ist damit überraschenderweise vom Radius unabhängig ungefähr 16 cm.

b) Man hängt die Erde in die Schnur. Wie gross ist der Abstand h vom Aufhängepunkt zur Erdoberfläche?

Wir untersuchen, wie h vom Kugelradius r und der Seilverlängerung h abhängt.
Die Länge der Strecke AP und die Länge $r\alpha$ des Bogens AC unterscheiden sich gerade um die halbe Seilverlängerung $\frac{l}{2}$, d.h. es gilt

$$\overline{AP}=r\alpha+\frac{l}{2}$$



Eine zentrische Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{r}$ führt auf die neuen Variablen ε und δ, wobei gilt:

(1) $\varepsilon=\frac{1}{r}\cdot\frac{l}{2}=\frac{l}{2r}$ bzw.

(2) $\delta=\frac{h}{r}$

Damit gilt im Dreieck $M'A'P'$:

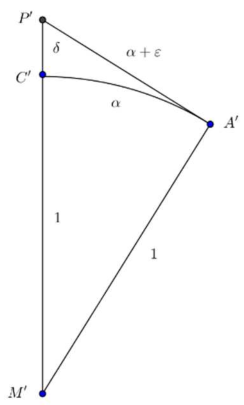
(3) $\tan\alpha=\alpha+\varepsilon$

Wegen α << 1 gilt näherungsweise

(4) $\tan\alpha\approx\alpha+\frac{\alpha^3}{3}$ oder mit (3)

$\alpha^3\approx 3\varepsilon$ oder

(5) $\alpha\approx(3\varepsilon)^{\frac{1}{3}}$



Nach dem Pythagoras gilt im $M'A'P'$:

(6) $$(1+\delta)^2 = 1+\tan^2\alpha$$

Verwendet man die Näherungen

$$(1+\delta)^2 \approx 1+2\delta \text{ und } \tan\alpha \approx \alpha$$

so gilt wegen (6) ungefähr

$$1+2\delta \approx 1+\alpha^2 \text{ oder wegen (5)}$$

$$2\delta \approx \alpha^2 = (3\varepsilon)^{\frac{2}{3}} \text{ und damit}$$

(7) $$\delta \approx \tfrac{1}{2}(3\varepsilon)^{\frac{2}{3}}$$

Kehrt man mit (1) und (2) zur ursprünglichen Figur zurück, so ergibt sich

$$\frac{h}{r} \approx \tfrac{1}{2}\left(\frac{3l}{2r}\right)^{\frac{2}{3}} \text{ und damit}$$

(8) $$h \approx r\cdot\tfrac{1}{2}\left(\frac{3l}{2r}\right)^{\frac{2}{3}} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} r^{\frac{1}{3}} l^{\frac{2}{3}}$$

Mit dem Erdradius r = 6377400 m erhält man schliesslich die gesuchte Näherungsformel

$$h \approx 121{,}501\cdot l^{\frac{2}{3}} \text{ m}$$

Das Ergebnis bedeutet, dass eine Seilverlängerung um den Faktor 10^3 ungefähr eine Multiplikation der Höhe um den Faktor 10^2 bewirkt.

Bemerkung:
Gleichung (3) kann auch mit einem Iterationsverfahren gelöst werden (→ Numerische Verfahren). Der Winkel für *l* = 1m ist ungefähr 0.35°.