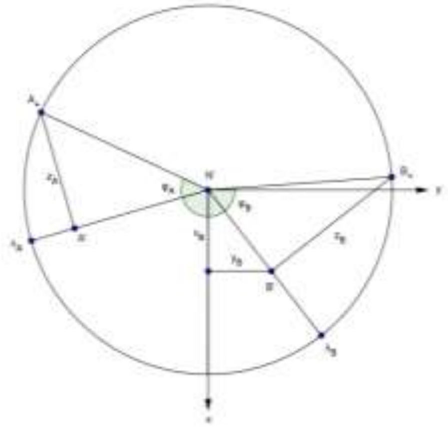
4. Eine Anwendung in der Kugelgeometrie

Aufgabe:
Gegeben sind zwei Punkte A(λ_A , φ_A) und B(λ_B , φ_B) der Erdoberfläche. Gesucht ist ihre kürzeste Entfernung e.

Beispiel:
A: New York $\lambda_A = -74°$, $\varphi_A = 41°$
B: Moskau $\lambda_B = 38°$, $\varphi_B = 56°$.



Kürzeste Verbindungen,
Geodätische auf Kugeln sind Grosskreisbogen.
Die kürzeste Entfernung e ist gleich der Länge des Grosskreisbogens zwischen A und B. In der Abbildung ist der Grundriss der Erdkugel mit Mittelpunkt N‘ und dem Erdradius 1 dargestellt. Die Meridiane von A und B erscheinen als Strecken. Klappt man sie in die Grundrissebene um, so kann der Grundriss der beiden Punkte A‘ und B‘ angegeben werden.

Damit ergeben sich die räumlichen Koordinaten des Punktes B zu:
$\overline{N'B'} = \cos \varphi_B$
$x_B = \overline{N'B'} \cdot \cos \lambda_B = \cos \lambda_B \cdot \cos \varphi_B$
$y_B = \overline{N'B'} \cdot \sin \lambda_B = \sin \lambda_B \cdot \cos \varphi_B$
$z_B = \sin \varphi_B$

Die Koordinaten von A ergeben sich analog. Für die Komponenten der Ortsvektoren von B bzw. A gilt damit:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_B \cos\lambda_B \\ \cos\varphi_B \sin\lambda_B \\ \sin\varphi_B \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_A \cos\lambda_A \\ \cos\varphi_A \sin\lambda_A \\ \sin\varphi_A \end{pmatrix}$$

Der kürzeste Abstand ist durch den Winkel ε bestimmt, den die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einschliessen. Dieser kann mit dem Skalarprodukt bestimmt werden:

$$\cos \varepsilon = \vec{a} \cdot \vec{b} = \cos\varphi_A \cos\lambda_A \cos\varphi_B \cos\lambda_B + \cos\varphi_A \sin\lambda_A \cos\varphi_B \sin\lambda_B + \sin\varphi_A \sin\varphi_B$$

Kürzester Abstand der Kugelpunkte A und B mit den Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

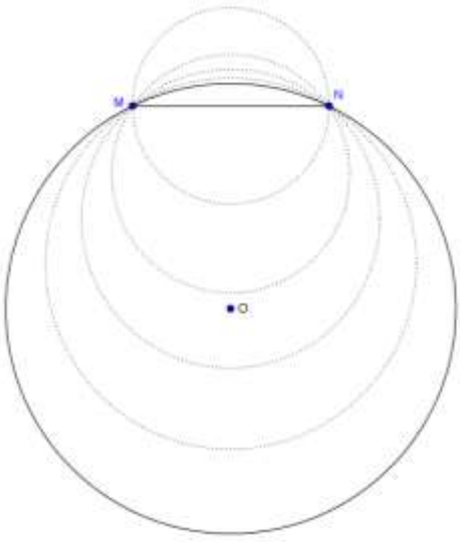
Es ist empfehlenswert, zunächst die Komponenten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zu bestimmen und anschliessend ihr Skalarprodukt zu bilden. Die Formel bringt keine Vereinfachung.

numerisches Beispiel:
$\cos \varepsilon = 0.39$ $\varepsilon = 1.17$ (Erdradien) Erdradius: 6370 km
Gesuchte Entfernung: $e = 1.17 \cdot 6370 = 7506$ km.

Die Städte Madrid M(λ_A = -3.6° , φ_A = 41.0°) und NewYork N(λ_B =.-74.0°, φ_B = 41.0°) haben ungefähr die gleiche geografische Breite. Ihre kürzeste Entfernung berechnet sich analog zu e = 5730 km. Für die Bogenlänge b des Breitenkreises erhält man die Distanz:

$$b = \frac{\Delta\lambda}{180°}\cdot \pi r = \frac{\Delta\lambda}{180°}\cdot \pi \cdot R \cdot \cos\varphi \approx \text{ 5910 km}$$

In der Abbildung sind verschiedene Kleinkreise in die Grosskreisebene von Madrid und NewYork geklappt worden. Es ist zu erkennen, dass die Wege auf den Kleinkreisen länger als der Weg auf dem Grosskreisbogen sind.



Näheres dazu im Abschnitt → Weitere Themen →Sphärische Astronomie