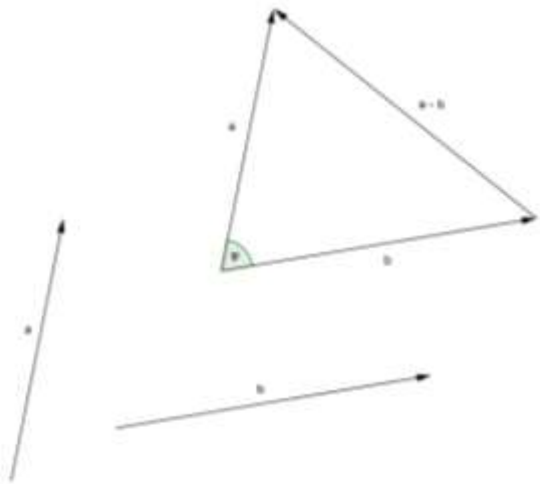
Das Skalarprodukt zweier Vektoren

1. Definition und Eigenschaften des Skalarprodukts

Das Problem den Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen, führt auf das sogenannte Skalarprodukt zweier Vektoren.

Vorbereitende Aufgabe:
Gegeben zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **.** Gesucht der Zwischenwinkel φ dieser Vektoren mit $0° \le \varphi \le 180°$



Nach dem **Cosinussatz** gilt.

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi$$

oder nach cos φ aufgelöst:

$$2\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2$$

oder in Komponenten:

$$\left|\vec{a}\right|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \qquad \left|\vec{b}\right|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \qquad \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = (a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2$$

womit sich die rechte Seite von (1) vereinfacht zu

$$2\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi = 2\cdot(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$$

Damit gilt:

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$$

Zwischenwinkelformel

Die reelle Zahl im Zähler der Zwischenwinkelformel heisst Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und man schreibt dafür:

Definition

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \qquad (1)$$

(1) definiert das **Skalarprodukt** als reelle Zahl, ermöglicht seine Berechnung aus den Komponenten

Multipliziert man die Zwischenwinkelformel mit dem Nenner, so erhält man die Darstellung

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \qquad (2)$$

(2) ermöglicht die Berechnung des Skalarprodukts aus den Beträgen und dem Zwischenwinkel.

Damit kann die Zwischenwinkelformel neu folgendermassen geschrieben werden.

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \qquad \text{Zwischenwinkelformel} \qquad (3)$$

Beispiele:

zu (1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 20$

Anschauliche Interpretation:
$\vec{a}$ sei ein Warenvektor, $\vec{b}$ der zugehörige Preisvektor.
Der Rechnungsbetrag ist gleich dem Skalarprodukt der beiden Vektoren.

zu (2) $|\vec{a}| = 5$, $\quad |\vec{b}| = 8 \qquad \varphi = 120° \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = -20$

ad (3) Zwischenwinkel der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \tfrac{20}{21} \qquad \varphi = \arccos(\tfrac{20}{21}) \approx 17.8°$$

Spezialfälle:

$\varphi = 0°$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ $\qquad$ **speziell:** $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

$\varphi = 90°$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\varphi = 180°$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist für spitze Winkel positiv, für stumpfe negativ.

Für das Skalarprodukt gelten die vom Zahlenrechnen vertrauten Gesetze gelten, nämlich:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$	kommutatives Gesetz
$(k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$	k $\in$**R**
$k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$	
$(k + l) \cdot \vec{a} = k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{a}$	
$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$	Distributivgesetz

Beweis durch Übergang zu den Komponenten.

Aber:
$\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$
denn links steht ein Vielfaches von $\vec{a}$, rechts ein Vielfaches von $\vec{c}$.

Bemerkung:
Im Unterschied zu den reellen Zahlen ist die Gleichung $\vec{a} \cdot \vec{b} = k$ nicht eindeutig lösbar. Zu jedem Vektor $\vec{a}$ und jeder reellen Zahl k gibt es beliebig viele Vektoren $\vec{b}$ mit $\vec{a} \cdot \vec{b} = k$.

Aufgabe:
Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$ und , für die gilt:
$2\cdot|a| = |\vec{b}| \neq 0$ und $\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = 0$. Wie gross ist ihr Zwischenwinkel φ?

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} = |a|^2 - |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$
$$= |\vec{a}|\cdot(|\vec{a}| - 2|\vec{a}|\cdot\cos\varphi) = |\vec{a}|^2\cdot(1-2\cdot\cos\varphi) = 0$$
$$\cos\varphi = \tfrac{1}{2} \qquad \varphi = 60°$$

Die drei Winkel, die ein Vektor mit den Koordinatenachsen bildet, sind nicht voneinander unabhängig. Es gilt der

Satz:
Sind α, β, γ die Winkel eines Vektors mit den Koordinatenachsen, dann gilt:
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Beweis:
$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|} \text{ und damit}$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}}{|\vec{a}|^2} = 1$$

Aufgabe: Winkel im Dreieck
Gesucht sind die Winkel im Dreieck A(-2, 2, 0)B(-1, 0, 2)C(-5, 2, -3)

Der Winkel α mit Scheitelpunkt A wird von den Vektoren
$\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ eingeschlossen:

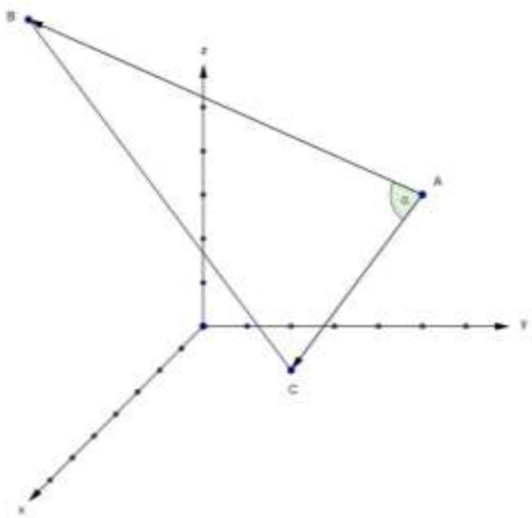
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-4\\2\\-5\end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{-9}{9\cdot\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \alpha = 135°$$

analog:

$$\cos\beta = \frac{18}{9\cdot\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \beta \approx 26.6°$$

$$\gamma \approx 13.4°$$

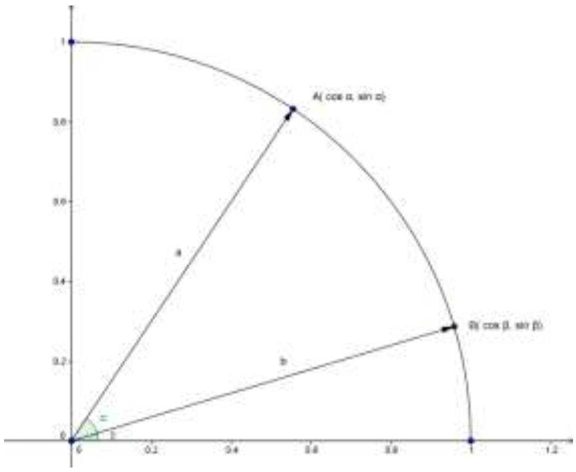


Herleitung des Cosinusadditionstheorems

Das Skalarprodukt der Einheitsvektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$

kann auf zwei Arten berechnet werden:



a)
aus den Komponenten:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$
b)
aus den Beträgen und dem Zwischenwinkel:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \beta)$
Damit gilt:

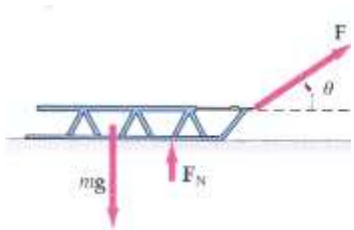
$\mathbf{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta}$

Eine Anwendung des Skalarprodukts in der Physik: mechanische Arbeit

Für die Berechnung der mechanischen Arbeit W ist nur die vektorielle Komponente $\vec{F}_s$ der Kraft $\vec{F}$ in Richtung des Weges $\vec{s}$ massgebend. Wegen

$\left|\vec{F}_s\right| = \left|\vec{F}\right| \cdot \cos\alpha$ gilt:

$W = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{s}\right| \cdot \cos\alpha = \vec{F} \cdot \vec{s}$ d.h.



Die mechanische Arbeit ist gleich dem Skalarprodukt aus dem Kraftvektor $\vec{F}$ und dem Verschiebungsvektor $\vec{s}$