

2. Orthogonalität

Setzt man fest, dass der Nullvektor auf jedem Vektor senkrecht steht, dann gilt:

Satz:

Die Vektoren \vec{a} und \vec{b} stehen genau dann aufeinander senkrecht (sind orthogonal), wenn gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Aufgabe:

Gegeben: A(2, 3, -2), B(6, -1, 1)

Gesucht sind die Punkte P auf der x-Achse, für die das Dreieck APB bei P rechtwinklig ist!

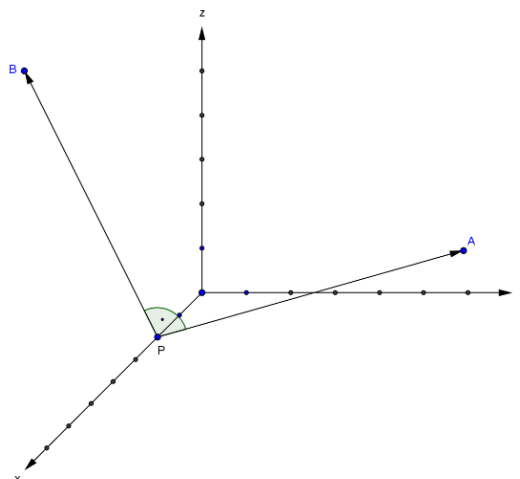
Bedingung:

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 2-x \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6-x \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x^2 - 8x + 7 = 0$$

Die quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$x_1 = 1 \text{ und } x_2 = 7$$

Die gesuchten Punkte $P_1(1, 0, 0)$, $P_2(7, 0, 0)$ sind die Schnittpunkte der Thaleskugel über der Strecke AB mit der x-Achse.



Übungsaufgabe:

Vom Rechteck ABCD kennt man die Endpunkte einer Diagonalen A(9, 6, 3) und C(-1, -6, 4). Die Ecke B liegt auf der positiven x-Achse. Gesucht sind die fehlenden Eckpunkte B und D.

Lösung:

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -1-x \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9-x \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = x^2 - 8x - 33 = (x+3) \cdot (x-11) = 0$$

B(11, 0, 0). Wegen $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ gilt $\vec{d} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$ und schliesslich D(-3, 0, 7)

Aufgabe:

x und z sind so zu bestimmen, dass die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ z \end{pmatrix}$ ein Quadrat

aufspannen.

Die Bedingungen: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ und $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$ führen auf das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{cases} 2x - 12 + 6z = 0 \\ x^2 + 40 = z^2 + 40 \end{cases}$$

mit den Lösungen: $x_1 = -3$ und $z_1 = 3$ bzw. $x_2 = z_2 = 3/2$

Senkrecht aufeinander stehende Geraden in der Grundebene

Aufgabe:

Gegeben sind die Punkte A(3,-2) und B(4,5).

Der Punkt C auf der y-Achse ist so zu bestimmen, dass das Dreieck ABC bei C rechtwinklig ist.

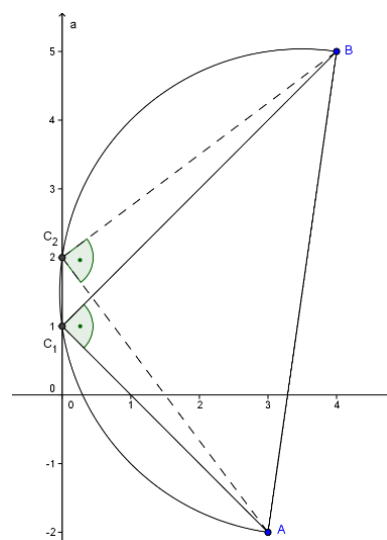
$$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -3 \\ y+2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -4 \\ y-5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = y^2 - 3y + 2 = (y-1) \cdot (y-2) = 0$$

$$y_1 = 1, y_2 = 2$$

Die gesuchten Punkte C sind die Schnittpunkte des Thaleskreises über AB mit der y-Achse:

$$C_1(0,1), C_2(0,2)$$



Aufgabe:

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Wie ist die y-Komponente von $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ b_2 \end{pmatrix}$ zu wählen,

dass \vec{b} auf \vec{a} senkrecht steht?

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 18 + 6b_2 = 0 \quad b_2 = -3 \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Allgemein gilt:

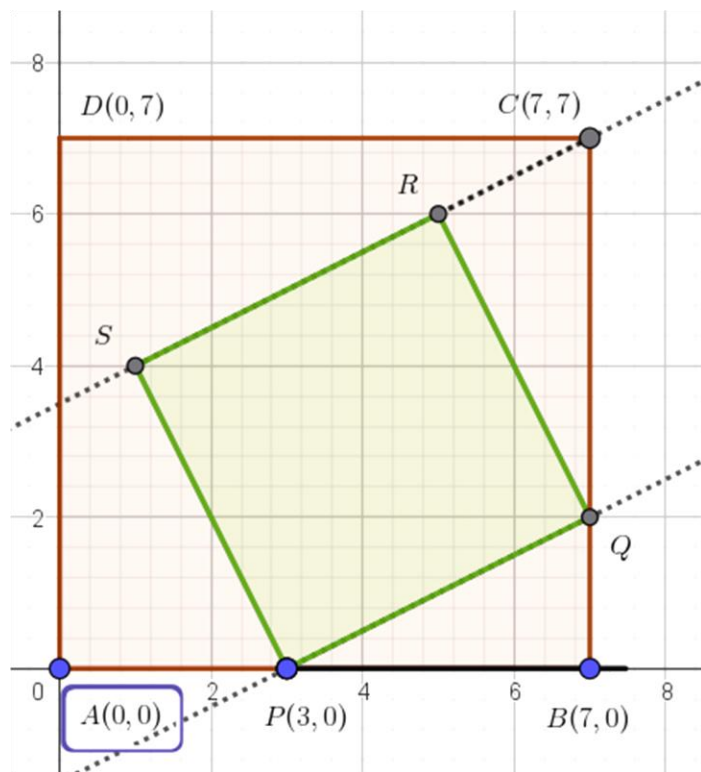
Satz:

Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$ sind orthogonal und haben gleichen Betrag.

Regel: Komponenten vertauschen, bei einer Komponente das Vorzeichen wechseln!

Aufgabe:

Gegeben sind das Quadrat ABCD mit der Seite A(0,0) B(7,0) im 1. Quadranten und der Punkt P(3,0) auf AB. Durch einen Punkt Q auf der Quadratseite BC und dem Punkt P wird eine Gerade g gelegt und eine parallele Gerade durch C. Der Punkt Q ist so zu bestimmen, dass p und g ein Quadrat PQRS mit der Seite PQ festlegen, dessen Seite RS auf p liegt



Bezeichnet man die Koordinaten von Q mit $Q(7, y)$, dann gilt:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} = \begin{pmatrix} 4 \\ y \end{pmatrix}$$

und nach dem Satz über orthogonale Vektoren

$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} -y \\ 4 \end{pmatrix}$, wobei die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 4 \\ y \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -y \\ 4 \end{pmatrix}$ den gleichen Betrag haben.

Mit $\overrightarrow{QC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7-y \end{pmatrix}$ folgt wegen $\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RC}$ auch $\overrightarrow{RC} = \overrightarrow{QC} - \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7-y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -y \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 3-y \end{pmatrix}$

Da \overrightarrow{RC} und \overrightarrow{QR} wegen der Quadrateigenschaft orthogonal sind

$$\overrightarrow{RC} \cdot \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} y \\ 3-y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

Und daraus die quadratische Gleichung

$$y^2 + 4y - 12 = (y - 2) \cdot (y + 6) = 0$$

Mit den Lösungen $y = 2$ und $y = -6$

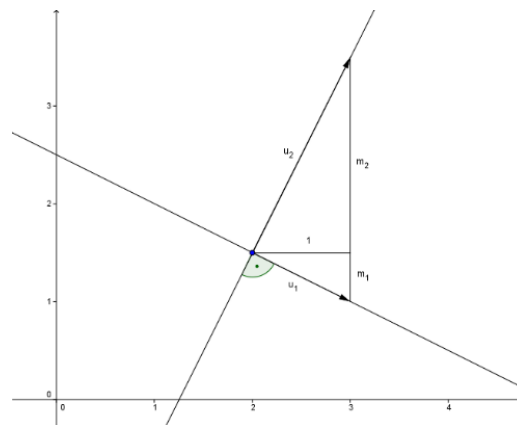
Die zweite Lösung mit dem Punkt $Q(7, -6)$ erfüllt zwar die Bedingungen ebenfalls, sie liegt aber ausserhalb des Quadrats ABCD.

Aufgabe:

Welche Beziehung besteht zwischen den Steigungen m_1 und m_2 zweier Geraden g_1 und g_2 , wenn g_1 und g_2 aufeinander senkrecht stehen?

Aus der Bedingung für Orthogonalität von g_1 und g_2 : folgt:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 1 + m_1 \cdot m_2 = 0$$



Satz:

Zwei nicht achsenparallele Geraden stehen genau dann aufeinander senkrecht, wenn für ihre Steigungen gilt: $\mathbf{m_1 \cdot m_2 = -1}$

Aufgabe:

Vom Punkt $P(-3, 4)$ das Lot auf die Gerade $g: 4x + 3y - 25 = 0$ zu fällen.

Geradensteigung $m_1 = -\frac{4}{3}$

Steigung des Lots $m_2 = \frac{3}{4}m_1 = \frac{3}{4}$

Ansatz für das Lot: $y = \frac{3}{4}x + q$

q ist bestimmt durch die Eigenschaft, dass $P(-3, 4)$ auf der Lotgeraden liegt
Gleichung der Lotgeraden:

$l: y = \frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$ oder $l: -3x + 4y - 25 = 0$

Zusatzaufgabe:

Ein von P ausgehender Lichtstrahl soll nach Spiegelung an der Geraden g in den Punkt $S(3, -4)$ reflektiert werden.

Lösungsidee:

P (oder auch S) an der Geraden spiegeln.

Lotfusspunkt F :
$$\begin{cases} 4x - 3y - 25 = 0 \\ -3x + 4y - 25 = 0 \end{cases}$$

$F(1, 7)$

F ist Mitte von PQ d.h. es gilt:

$$\vec{f} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{p} + \vec{q}) \quad \text{oder} \quad \vec{q} = 2 \cdot \vec{f} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 2+3 \\ 14-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Spiegelpunkt $Q(5, 10)$

Der Reflexionspunkt R ist der Schnittpunkt der Geraden QS mit der Geraden g .

Lösung: $R(4, 3)$

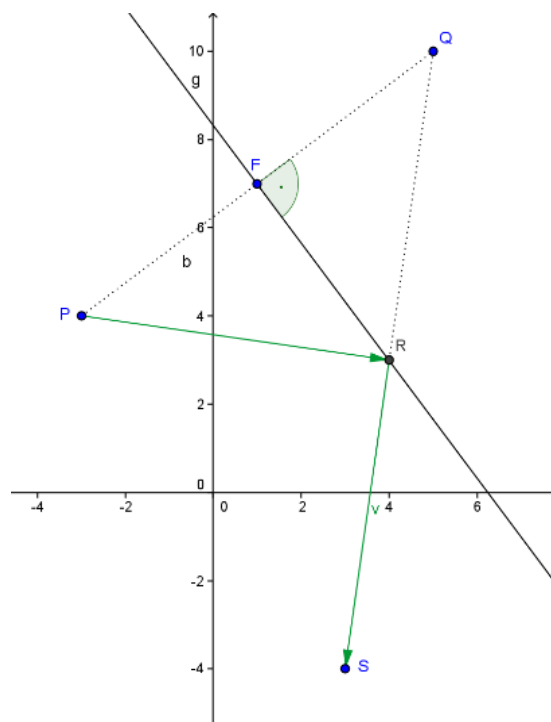
Übungsaufgabe:

Gesucht ist der Höhenschnittpunkt H im Dreieck $A(4,2)$ $B(3,-6)$ $C(-6,0)$

Lösung:

$$h_a: 3x - 2y - 8 = 0 \quad h_b: 5x + y - 9 = 0$$

Höhenschnittpunkt $H(2, -1)$



Beispiele von Beweisen mit dem Skalarprodukt:

Satz:

Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Beweis:

Sei H der Schnittpunkt der Höhen h_a und h_c

d.h. es gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{u} = 0 \text{ und } \vec{c} \cdot \vec{w} = 0$$

Zu zeigen ist nun, dass der Vektor $\vec{v} = \overrightarrow{HB}$ auf \vec{b} senkrecht steht.

Es gilt:

$$\vec{a} = -\vec{v} + \vec{w} \text{ bzw. } \vec{w} = \vec{a} + \vec{v}$$

$$\vec{c} = -\vec{u} + \vec{v} \text{ bzw. } \vec{u} = \vec{v} - \vec{c}$$

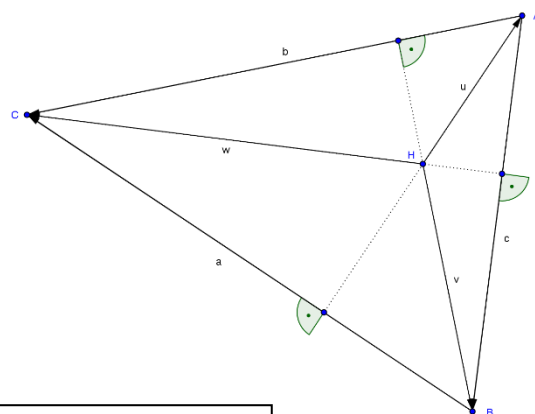
Nach Voraussetzung ist

$$\vec{a} \cdot \vec{u} = \vec{a} \cdot (\vec{v} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{v} - \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \text{ und}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{w} = \vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{v}) = \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{v} = 0$$

Addiert man die beiden Seiten, so erhält man:

$$\vec{a} \cdot \vec{v} + \vec{c} \cdot \vec{v} = (\vec{a} + \vec{c}) \cdot \vec{v} = \vec{b} \cdot \vec{v} = 0 \quad \square$$



Satz:

Ein Parallelogramm ist genau dann ein Rhombus, wenn seine Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.

Bemerkung:

Im Rhombus sind die Diagonalen auch die Winkelhalbierenden.

Beweis:

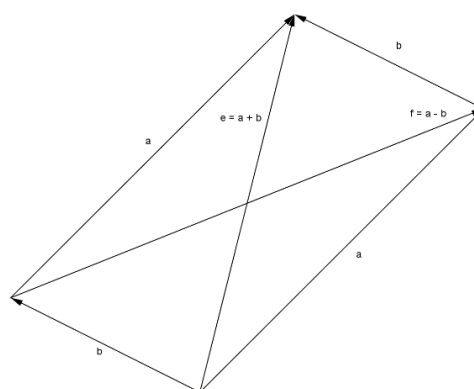
Die Diagonalen stehen aufeinander senkrecht

$$\Leftrightarrow \vec{e} \cdot \vec{f} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

\Leftrightarrow Das Parallelogramm ist ein Rhombus.



Übungsaufgabe:

Wie gross ist der Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b} ($\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$), wenn gilt:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$$

Lösung: 90°