

### 3. Normalprojektion eines Vektors

Für die Länge der Normalprojektion von  $\vec{b}$  auf  $\vec{a}$  gilt:

$$|\vec{p}| = |\vec{b}| \cdot \cos \varphi \quad \text{falls } \varphi \text{ spitz ist.}$$

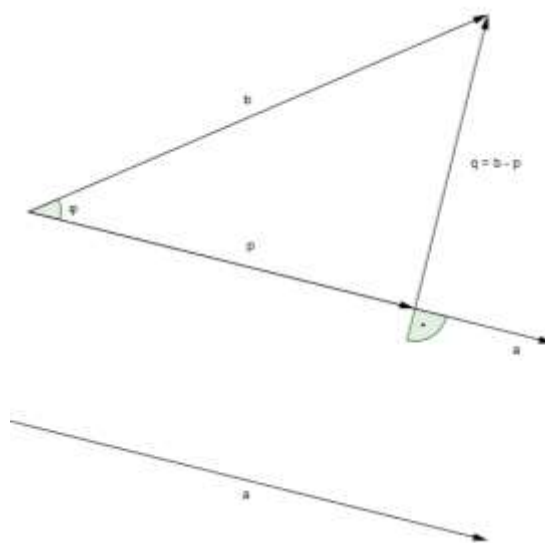
Mit der folgenden einfachen Umformung (dirty trick) kann dieser Term als Skalarprodukt aufgefasst werden:

$$|\vec{p}| = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \vec{a}^0 \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}^0$$

$\vec{a}^0$  ist der Einheitsvektor in Richtung von  $\vec{a}$

Um die Komponenten des Projektionsvektors  $\vec{p}$  zu erhalten, ist der Vektor  $\vec{a}$  so zu strecken, dass er die geforderte Länge erhält:

$$\vec{p} = (\vec{b} \cdot \vec{a}^0) \cdot \vec{a}^0$$



$\vec{p} = (\vec{b} \cdot \vec{a}^0) \cdot \vec{a}^0$	Normalprojektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$
---	--

Kontrolle: Der Vektor  $\vec{q} = \vec{b} - \vec{p}$  steht auf  $\vec{a}$  senkrecht.

Bemerkung:

Die Aussage gilt auch, falls  $\varphi$  stumpf ist (in diesem Fall ist das Skalarprodukt negativ, der Projektionsvektor  $\vec{p}$  ist zu  $\vec{a}$  entgegengesetzt gerichtet).

Beispiel (Grundebene):

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

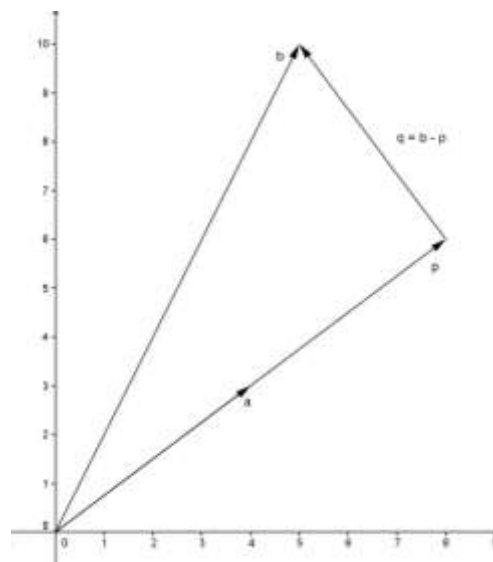
$$|\vec{p}| = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}}{5} = 10 \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Kontrolle: Der Vektor } \vec{q} = \vec{b} - \vec{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

steht auf  $\vec{a}$  senkrecht.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |\vec{p}| = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}}{3} \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Kontrolle: } \vec{q} = \vec{b} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ steht auf } \vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ senkrecht.}$$



Herleitungsvariante:

Wählt man für den Projektionsvektor den Ansatz:

$$\vec{p} = t \cdot \vec{a} \quad t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

dann ist der Parameter  $t$  so zu bestimmen, dass gilt:

$$\vec{q} \cdot \vec{a} = (\vec{b} - \vec{p}) \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{p} \cdot \vec{a} = 0 \text{ woraus folgt:}$$

$$\vec{p} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (2)$$

Wegen (1) und (2) gilt:

$$\vec{p} \cdot \vec{a} = (t \cdot \vec{a}) \cdot \vec{a} = t \cdot \vec{a}^2 = t \cdot |\vec{a}|^2 = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

und schliesslich:

$$t = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \quad \text{und} \quad \vec{p} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} = (\vec{b} \cdot \vec{a}^0) \cdot \vec{a}^0$$