2. Eigenschaften des Vektorprodukts

1. $\vec{a}\times\vec{b}$ ist ein gemeinsamer Normalenvektor von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ d.h. für das Skalarprodukt gilt: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=0$ und $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b}=0$.

2. Der absolute Betrag des Vektorprodukts ist gleich der Masszahl des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. (Beweis durch Übergang zu den Komponenten). $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$

3. $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a}\times\vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (d.h. $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a}\times\vec{b}$ sind in dieser Reihenfolge gleich orientiert wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand (so genannte Korkzieherregel).

Aufgabe zu 1.:

Bestimme einen Vektor $\vec{x}$ mit $|\vec{x}|=7$, der auf den Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\2\\-6\end{pmatrix}$ senkrecht steht.

$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}-12\\6\\-4\end{pmatrix}$ mit $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=14$ Lösung: $\vec{x}=\pm\frac{7}{14}\cdot\begin{pmatrix}-12\\6\\-4\end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix}-6\\3\\-2\end{pmatrix}$

Die Eigenschaften 2. und 3. sind vor allem in der Physik hilfreich (Drehmoment, Lorentzkraft)

Zur Vorbereitung des Beweises von 2:

Gegeben: $\vec{a}=\begin{pmatrix}6\\1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

Gesucht:

a) der Zwischenwinkel γ der Vektoren : $\vec{a}$ und $\vec{b}$

b) $\vec{a}\times\vec{b}$ und $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$

c) den Inhalt I des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms

a) $\cos\gamma=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{6\cdot 2+2\cdot 1}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{5}}=\frac{14}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{5}}$ $\gamma = 12.1°$

b) $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=3$

c) $I=|\vec{a}|\cdot h=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\gamma=3$ in Übereinstimmung mit b)

Beweis von 2:

Hilfssatz: $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$ $\rightarrow$ Schwarz'sche Ungleichung

Beweis durch Übergang zu den Komponenten oder

Überprüfung im Spezialfall $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

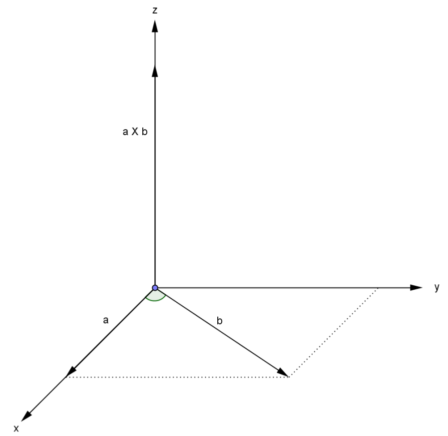
Aus dem Hilfssatz folgt:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2 - |\vec{a}|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2\cdot\cos^2\varphi = |\vec{a}|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2(1-\cos^2\varphi) = |\vec{a}|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2\sin^2\varphi .$$

Wegen $0 \le \varphi \le 180°$ folgt daraus die die Behauptung $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$.

zu 3.

Wir wählen ein neues Koordinatensystem so, dass die x-Achse die Richtung von $\vec{a}$ hat und $\vec{b}$ in der xy-Ebene liegt. Die Komponenten von $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$ haben dann die Form:



$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $a_1 > 0$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $b_2 > 0$.

Für ihr Vektorprodukt gilt:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 \end{pmatrix}$$

d.h. der Vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ hat die Richtung der positiven x-Achse, die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a}\times\vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Für das Vektorprodukt gelten ausserdem die folgenden Gesetze:

a). $\vec{b}\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{b}$ das Vektorprodukt ist antikommutativ

b) $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

c) $\left(k\cdot\vec{a}\right)\times\vec{b} = k\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ z.B.: $\begin{pmatrix} 24 \\ 48 \\ 48 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 24\cdot\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$

d) $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$

e) Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig (kollinear), dann gilt: $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$

Uebungsaufgabe:

Zeige: Bildet man aus drei beliebigen Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ das Vektorprodukt $\vec{u} = \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$, dann liegt $\vec{u}$ in der von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Ebene.

Hinweis:

Vektoren mit ganzzahliger Länge d:

d = 3: $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ d = 7: $\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$ d = 9: $\begin{pmatrix}4\\4\\7\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix}$ d = 11: $\begin{pmatrix}6\\6\\7\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\6\\9\end{pmatrix}$

Basissysteme mit ganzzahliger Länge d

Wählt man für r = 1, 2, 3,4, .. s = r + 1 und t = r·(r + 1) dann bilden die folgenden Vektoren eine Basis des dreidimensionalen Raumes R^3:

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{d}\begin{pmatrix}r\\s\\t\end{pmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \frac{1}{d}\begin{pmatrix}t\\r\\-s\end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_3 = \frac{1}{d}\begin{pmatrix}-s\\t\\-r\end{pmatrix}$$

Beispiel: r = 1

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \qquad \vec{e}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} \qquad \vec{e}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$$