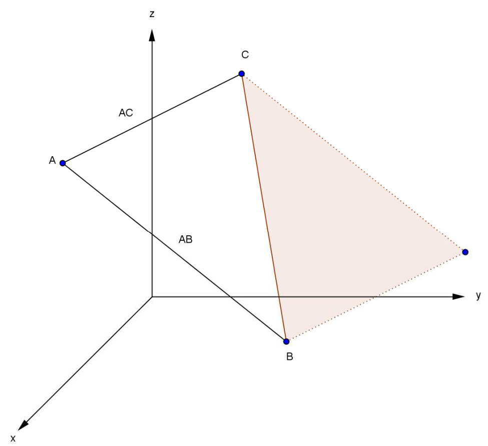
3. Anwendungen des Vektorprodukts in der analytischen Geometrie

Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks



Satz:
Für den Inhalt des Dreiecks ABC gilt:

$$I = \tfrac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$$

Beispiel:
A(-2, 3, -1) B(-5, 7, 5) C(7, -1, -3)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 16 \\ 48 \\ -24 \end{pmatrix} = 8 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Dreiecksinhalt:

$$I = \tfrac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = 28$$

Uebungsaufgabe:
Inhalt des Dreiecks A(1, -1, 3) B(2, 1, 3) C(4, 1, -3)

Lösung: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ I = 7

Spezialfall: Grundebene

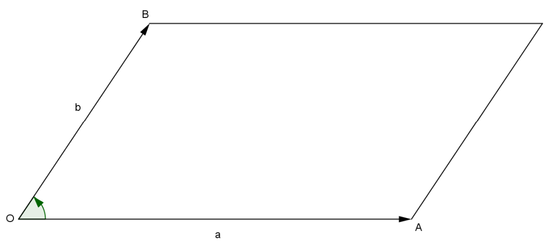
Bestimme den Inhalt des durch die Punkte O(0,0) A(a_1, a_2) B(b_1, b_2) festgelegten Parallelogramms

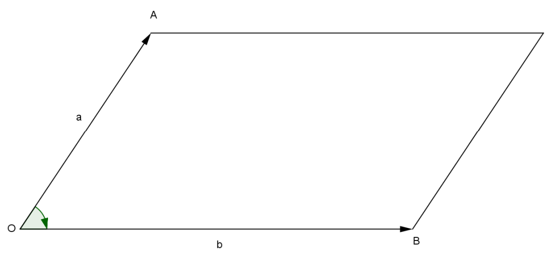
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix} \qquad I = \tfrac{1}{2}\left|a_1 b_2 - a_2 b_1\right|$$

Satz:
Der Inhalt des von den Vektoren a und b aufgespannten Parallelogramms ist gerade gleich dem Wert der Determinante $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$. Dieser Inhalt ist

positiv, wenn $\vec{b}$ durch eine positive Drehung aus $\vec{a}$ hervorgeht (das Dreieck OAB ist positiv orientiert)

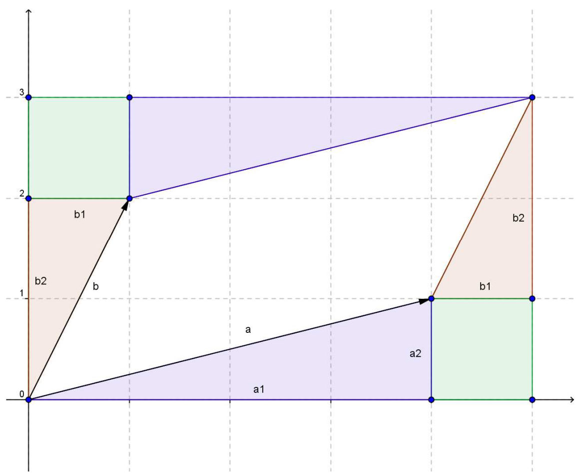
negativ, wenn $\vec{b}$ durch eine negative Drehung aus $\vec{a}$ hervorgeht das Dreieck OAB ist negativ orientiert





Elementare Herleitung:
Das Parallelogramm entsteht aus dem Rechteck, indem man die farbigen Flächenstücke entfernt.

$I = (a_1 + b_1)\cdot(a_2 + b_2) - (2a_2b_1 + b_1b_2 + a_1a_2)$
$= a_1b_2 - a_2b_1$



Die folgenden Anwendungen des Vektorprodukts werden später besprochen:

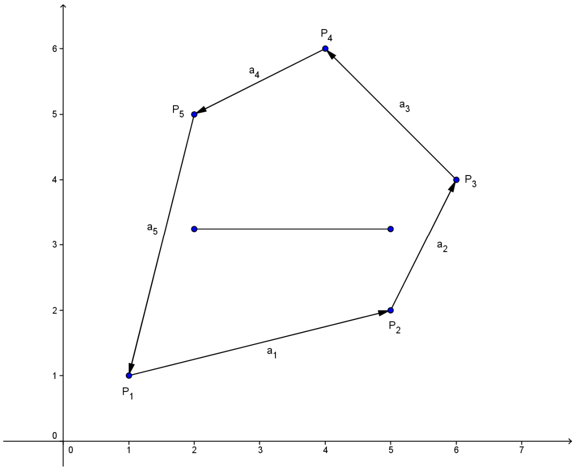
- Ein einfacher Weg zur Koordinatengleichung der Ebene durch die Punkte A, B, C
- Ein einfacher Weg zur Bestimmung der Schnittgeraden zweier Ebenen
- Berechnung des Abstands eines Punktes P von einer Geraden g

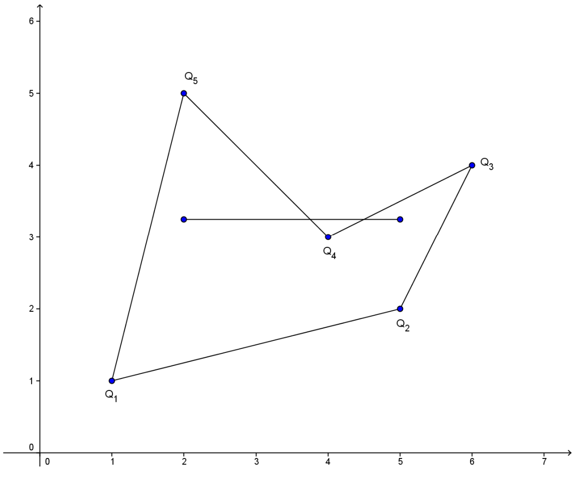
Konvexität von Vielecken

Ein Vieleck heisst genau dann konvex, wenn die Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte im Innern des Vielecks verläuft. In der Abbildung ist ein kovexes und ein nicht konvexes Vieleck dargestellt:

Vieleck konvex
$P_1(1, 1, 0)$, $P_2(5, 2, 0)$, $P_3(6, 4, 0)$,
$P_4(4, 6, 0)$, $P_5(2, 5, 0)$

Vieleck nicht konvex
$Q_1(1, 1, 0)$, $Q_2(5, 2, 0)$, $Q_3(6, 4, 0)$,
$Q_4(4, 3, 0)$, $Q_5(2, 5, 0)$





Es gilt der folgende
Satz (ohne Beweis):
Ein Vieleck $P_1P_2\ldots.P_n$ ist genau dann konvex, wenn gilt:
Die Vektorprodukte aufeinanderfolgender Kantenvektoren $\vec{a}_i \times \vec{a}_{i+1}$ i = 1, 2, …. n – 1 und $\vec{a}_n \times \vec{a}_1$ die gleiche Orientierung haben.

Werden die Punkte Pi gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen, dann beim konvexen Beispiel alle Vektorprodukte in Richtung der positiven z-Achse orientiert. Beim nicht konvexen Beispiel ist dagegen das Vektorprodukt $\overrightarrow{Q_3Q_4} \times \overrightarrow{Q_4Q_5}$ in Richtung der negativen z-Achse orientiert, die restlichen in Richtung der positiven z-Achse.

Der folgende Algorithmus kann auch angewendet werden, um zu entscheiden, ob ein Punkt R im Innern eines konvexen Vielecks $P_1P_2\ldots.P_n$ liegt oder nicht:

1. Stelle nach dem Satz fest, ob das Vieleck konvex ist.
2. Bilde für jeden Kantenvektor $\vec{a}_i$ i = 1, 2, …. n das Vektorprodukt $\vec{a}_i \times \overrightarrow{P_iR}$
3. Ergibt sich in jedem Fall aus 2. Die gleiche orientierung wie in 1., dann liegt R innerhalb des konvexen Vielecks.