

7.2 Kürzester Abstand e eines Punktes Q von einer Geraden g in der Grundebene

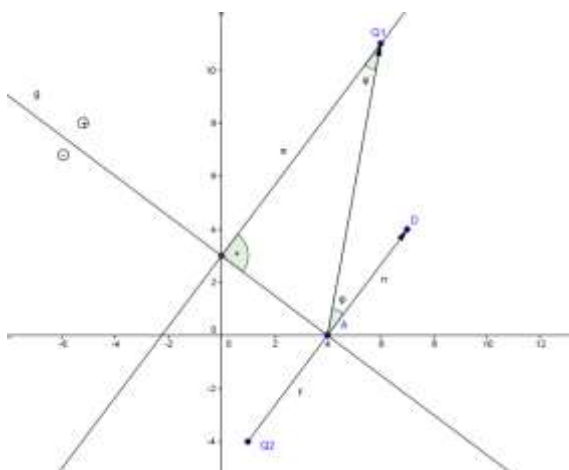
Abbildung:

$Q(6,11)$, $g: 3x + 4y - 12 = 0$, $A(4,0)$

Gegeben:

$Q(x_Q, y_Q)$ $g: ax + by + c = 0$

Ist $A(x_A, y_A)$ ein beliebiger Geradenpunkt, dann kann der Abstand e eines Punktes Q von der Geraden g als Normalprojektion des Vektors \overrightarrow{AQ} bezüglich des Normalenvektors \vec{n} aufgefasst werden.



$$e = |\overrightarrow{AQ}| \cdot \cos \varphi$$

$$e > 0 \text{ für } 0 < \varphi < \pi/2$$

$$e = 0 \text{ für } \varphi = \pi/2$$

$$e < 0 \text{ für } \pi/2 < \varphi < \pi.$$

Multipliziert man die rechte Seite der Gleichung mit $\frac{|\vec{n}|}{|\vec{n}|}$, dann gilt gemäss Definition des

Skalarprodukts :

$$e = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{AQ}}{|\vec{n}|}$$

oder in Komponenten

$$e = \frac{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_Q - x_A \\ y_Q - y_A \end{pmatrix}}{|\vec{n}|} = \frac{ax_Q + by_Q - (ax_A + by_A)}{|\vec{n}|} = \frac{ax_Q + by_Q + c}{|\vec{n}|}$$

Da A auf der Geraden liegt, erfüllen seine Koordinaten die Gleichung

$$ax_A + by_A + c = 0 \quad \text{bzw. es gilt: } c = -(ax_A + by_A).$$

Satz:

Man erhält (vom Vorzeichen abgesehen) den Abstand eines Punktes Q von der Geraden g in der Grundebene, indem man die Koordinaten von Q in die linke Seite der Geradengleichung einsetzt und durch den absoluten Betrag des Normalenvektors dividiert.

Beispiel:

Der Punkt $Q_1(6/11)$ hat von der Geraden $g: 3x + 4y - 12 = 0$ den Abstand $e = 10$

Der Punkt $Q_2(1/-4)$ hat von der Geraden $g: 3x + 4y - 12 = 0$ den Abstand $e = -5$

Die Gerade zerlegt die Grundebene in zwei Halbebenen. In der einen Halbebene ist e positiv, in der andern e negativ.

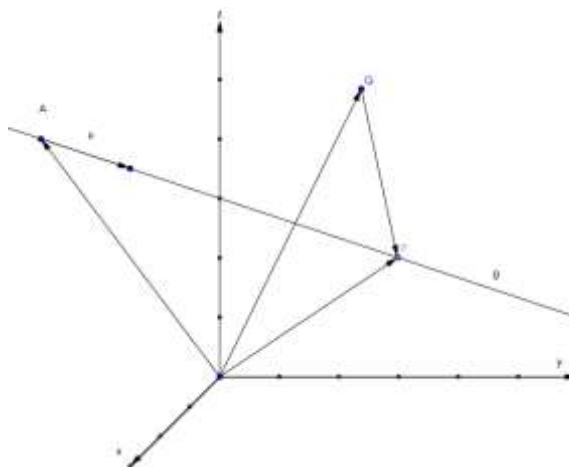
7.3 Kürzester Abstand e eines Punktes Q von einer Geraden g im Raum

1)

Lösung mit dem Skalarprodukt

Idee:

Der Punkt F auf der Geraden g, der vom Punkt Q kürzesten Abstand hat, hat die Eigenschaft, dass der Verbindungsvektor \overrightarrow{QF} und der Richtungsvektor \vec{u} der Geraden g einen rechten Winkel einschliessen, d.h. es gilt: $\overrightarrow{QF} \cdot \vec{u} = 0$.



Beispiel:

$$Q(1/-1/1) \quad g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Komponenten des Verbindungsvektors } \overrightarrow{QF} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t \\ 4t-5 \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$\text{Aus } \overrightarrow{QF} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t \\ 4t-5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{folgt } t = 1 \text{ und damit } F(3, 1, 0).$$

$$\text{Wegen } \overrightarrow{QF} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ergibt sich der gesuchte Abstand zu } e = |\overrightarrow{QF}| = 3.$$

2)

Lösung als Extremalproblem

Der Parameter t ist so zu wählen, dass der Betrag des Verbindungsvektors \overrightarrow{QF} (bzw. dessen Quadrat) minimale Länge hat. Bezeichnen wir das Quadrat des Abstands mit D(t), dann gilt wegen (*):

$$D(t) = |\overrightarrow{QF}|^2 = (1+t)^2 + (1+t)^2 + (4t-5)^2 = 18t^2 - 36t + 18 + 9 = 18 \cdot (t-1)^2 + 9$$

Der Graph der Funktion D ist eine nach oben geöffnete Parabel, deren Scheitel an der Stelle $t = 1$ liegt. Das minimale Abstandsquadrat $D(1) = 9$ liefert den kürzesten Abstand $e = 3$. Setzt man $t = 1$ in die Geradengleichung ein, so ergibt sich erneut der Lotpunkt $F(3, 1, 0)$.

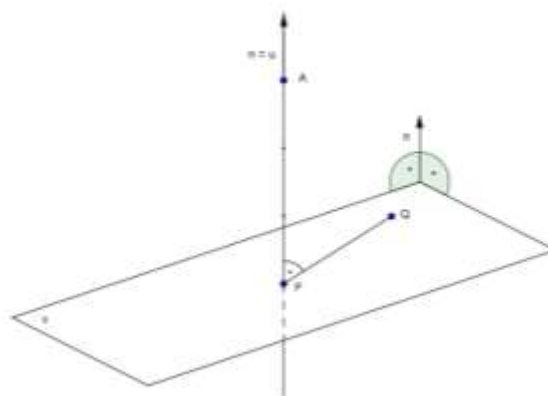
Das Minimum kann auch mit den Methoden der Differentialrechnung bestimmt werden:
 $D'(t) = 12t - 36 = 0$ für $t = 1$.

3)

Lösung mit der Normalebene

Zu einer gegebenen Geraden g und einem Punkt Q gibt es unendlich viele Geraden, die auf g senkrecht stehen. Sie liegen in einer Ebene v zu g durch Q . v heisst **Normalebene** zu g durch Q . Der gesuchte Punkt F ist der Schnittpunkt dieser Normalebene v mit g .

Der Richtungsvektor \vec{u} der Geraden g ist ein Normalenvektor der Ebene v .



Beispiel:

$$Q(1, -1, 1) \quad g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Der Richtungsvektor: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von v

Ansatz für v : $x + y + 4z + d = 0$

$Q \in v$: $x + y + 4z - 4 = 0$

v mit g : $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ schneiden

$$(2 + t) + t + 4(-4 + 4t) - 4 = 0 \quad 18t - 18 = 0 \quad t = 1 \quad F(3, 1, 0)$$

$$\overrightarrow{QF} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{kürzester Abstand } e = 3.$$

Übungsaufgabe:

Vom gleichschenkligen und bei C rechtwinkligen Dreieck ABC kennt man den Eckpunkt

$A(3, -3, 4)$. Die Seite BC liegt auf der Geraden $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Gesucht sind die

fehlenden Eckpunkte B und C des Dreiecks.

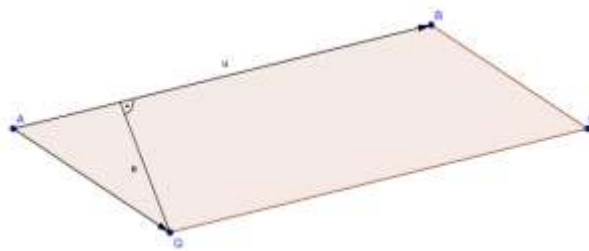
Lösung:

v : $2x - y + 2z - 17 = 0$, mit g schneiden $C(7, 1, 2)$, $B_1(3, 3, -2)$ $B_2(11, -1, 6)$

4)

Lösung mit dem Vektorprodukt

Verschiebt man den Richtungsvektor \vec{u} der Geraden g parallel durch den Punkt Q , so entsteht ein Parallelogramm $ABRQ$. Der Inhalt I dieses Parallelogramms kann auf zwei verschiedene Arten berechnet werden:



elementar: $I = e \cdot |\vec{u}|$

mit dem Vektorprodukt: $I = |\vec{u} \times \overrightarrow{AQ}|$

Gleichsetzen $I = e \cdot |\vec{u}| = |\vec{u} \times \overrightarrow{AQ}|$

und damit

$$e = \frac{|\vec{u} \times \overrightarrow{AQ}|}{|\vec{u}|}$$

kürzester Abstand des Punktes Q von der
Geraden g (Startpunkt A , Richtungsvektor \vec{u})

Beispiel:

$Q(1, -1, 1)$ $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$e = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{18}} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{18}} = \frac{9\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 3$$

Bemerkung:

Diese Variante liefert die Koordinaten des Punktes F nicht direkt.

Beispiele für mögliche Einkleidungen dieser Grundaufgabe:

- Von einer Kugel kennt man den Kugelmittelpunkt Q und eine Kugeltangente g . Gesucht ist der Kugelradius r .
- Von einem Drehzylinder mit Achse g kennt man die Achse g und einen Zylinderpunkt Q . Gesucht ist der Radius des Drehzylinders.