4. Darstellung der Ebene

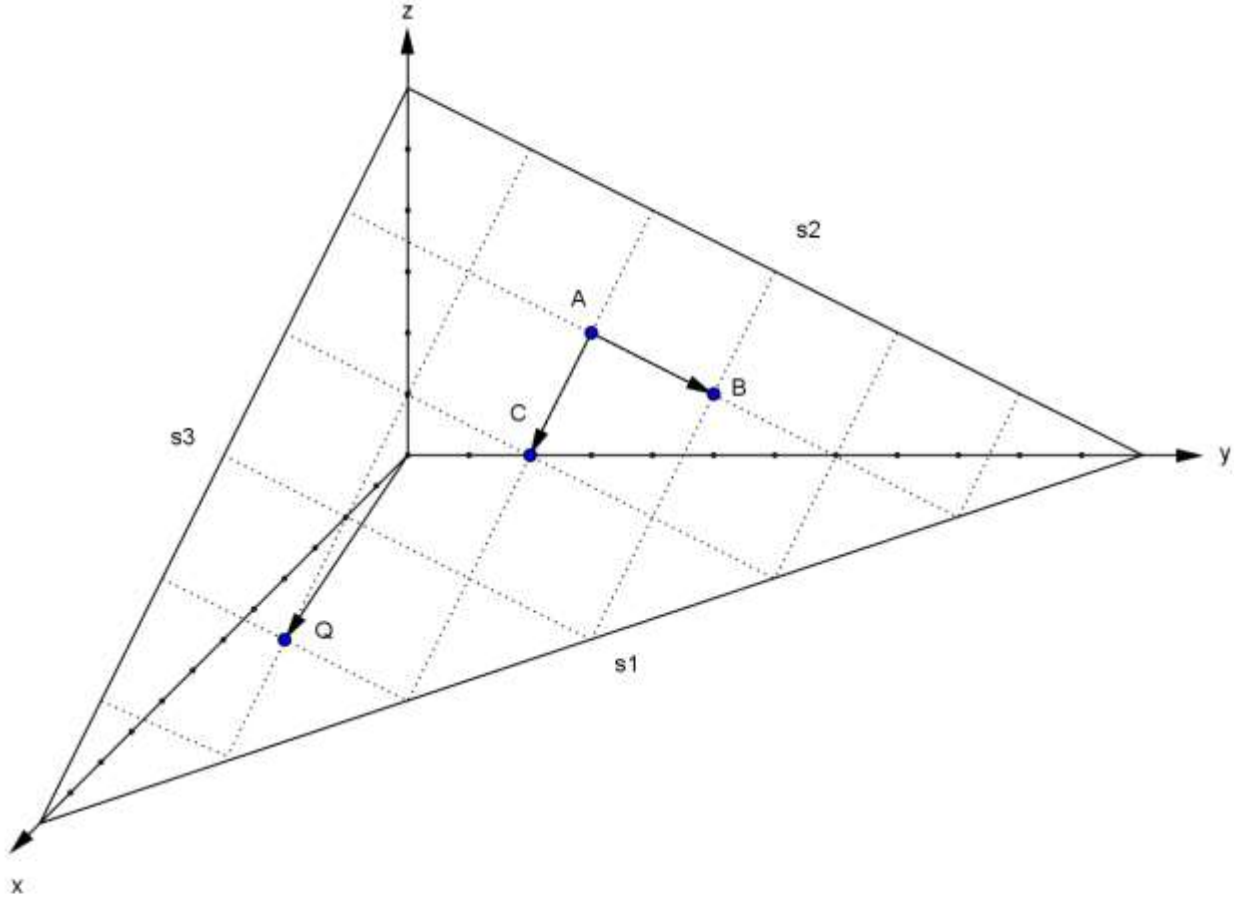
4.1 Die Parametergleichung der Ebene

einführendes Beispiel:
In der Abbildung ist die durch die Punkte A(2, 4, 3) B(2, 6, 2) C(4, 4, 2) festgelegte Ebene ε dargestellt.

Die Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ heissen Richtungsvektoren der Ebene.

Parametergleichung der Ebene ε: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{matrix} x = 2 + 0 \cdot t + 2 \cdot s \\ y = 4 + 2 \cdot t + 0 \cdot s \\ z = 3 - 1 \cdot t - 1 \cdot s \end{matrix}$

Dem in der Skizze gezeichneten Ebenenpunkt Q(8, 2, 1) entsprechen die Parameterwerte
t = -1 bzw. s = 3



Zusatzfrage:
In welchen Punkten schneidet ε die Koordinatenachsen?
Im Schnittpunkt mit der x-Achse gilt: y = z = 0. Dies ist für die Parameterwerte t = -2
bzw. s = 5 der Fall. Durch Einsetzen folgt X(12, 0, 0) und analog Y(0, 12, 0) und Z(0/0/6).

Allgemein:
Eine Ebene ε ist durch einen Punkt A mit dem Ortsvektor $\vec{a}$ und zwei linear unabhängige Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eindeutig festgelegt.
Für einen beliebigen Punkt P in der Ebene ε ist $\overrightarrow{AP}$ eine Linearkombination der Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ d.h. es gilt:
$\overrightarrow{AP} = t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ mit geeigneten reellen Parameterwerten t und s.

Für den Ortsvektor $\vec{r}$ zu einem Ebenenpunkt P gilt damit:

$\vec{r} = \vec{a} + t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ **Parametergleichung der Ebene**

$\vec{a}$	Ortsvektor eines gegebenen Ebenenpunkts A
$\vec{u}$, $\vec{v}$	Richtungsvektoren
t, s ∈ R	Parameter Jedes Zahlenpaar (t, s) liefert einen Ortsvektor, dessen Endpunkt in der Ebene liegt und umgekehrt.

Aufgabe:
Gesucht ist eine Parametergleichung der Ebene durch die Punkte
A(4, 0, 0), B(0, 4, 0)und C(0, 0, 2).

Wählt man etwa für die Richtungsvektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ bzw. $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ so erhält man die Parametergleichung:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ oder } \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung:
Die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ können durch ein beliebiges Vielfaches oder durch eine Linearkombinationen der Form $\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$ ersetzt werden, der Ortsvektor nach A durch den Ortsvektor nach einem beliebigen anderen Ebenenpunkt.

Bezeichnungen:
Die Schnittgeraden einer Ebene mit den Bildebenen heissen **Spuren der Ebene**, nämlich
Schnittgerade mit der xy-Ebene: 1. Spur (Grundrissspur)
Schnittgerade mit der yz-Ebene: 2. Spur (Aufrissspur)
Schnittgerade mit der xz-Ebene: 3. Spur (Seitenrissspur)

4.2 Die Koordinatengleichung der Ebene

Eliminiert man in der Parametergleichung der Ebene die Parameter s und t, so erhält man die sogenannte Koordinatengleichung der Ebene.

Illustration der Idee am Einführungsbeispiel:

$$x = 2 + 0 \cdot t + 2 \cdot s$$
$$y = 4 + 2 \cdot t + 0 \cdot s$$
$$z = 3 - 1 \cdot t - 1 \cdot s$$

Mit den ersten beiden Gleichungen können die Parameter t und s in den Koordinaten x und y ausgedrückt werden, nämlich:

$s = \frac{1}{2} \cdot (x-2)$ bzw. $t = \frac{1}{2} \cdot (y-4)$ eingesetzt in die 3. Gleichung:

$z = 3 - \frac{1}{2} \cdot (y-4) - \frac{1}{2} \cdot (x-2)$ mit 2 multiplizieren und ordnen:

ε: $\mathbf{1} \cdot x + \mathbf{1} \cdot y + \mathbf{2} \cdot z - 12 = 0$ Koordinatengleichung der Ebene

Die Koordinatengleichung vereinfacht die Bestimmung der Achsenschnittpunkte:
Setzt man in der Koordinatengleichung y = z = 0, so führt dies auf den Schnittpunkt mit der x-Achse X(12, 0, 0).

Allgemein:
Eliminiert man in der Parametergleichung der Ebene die Parameter s und t, so erhält man eine lineare Gleichung der Form

ε: ax + by + cz + d = 0

die sogenannte **Koordinatengleichung der Ebene**, wobei a, b, c nicht alle 0 sein dürfen.

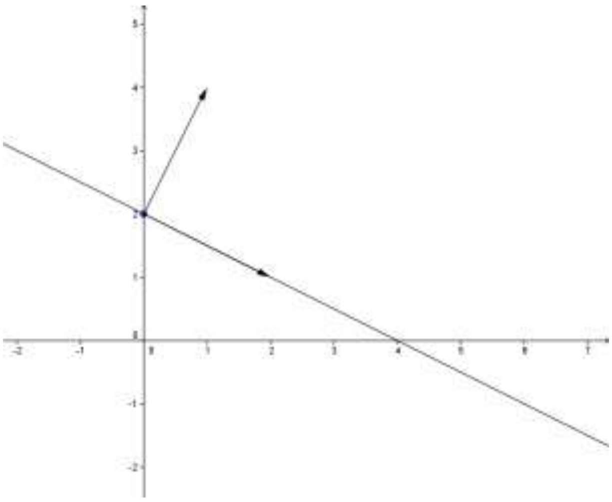
Bemerkung.:
Ein Punkt liegt genau dann in der Ebene, wenn seine Koordinaten die Ebenengleichung erfüllen.

Beispiel:
Der Punkt P(7, 1, 2) liegt in der Ebene ε: x + y + 2z - 12 = 0, denn seine Koordinaten erfüllen die Ebenengleichung.

Die Elimination von t und s in der Parametergleichung ist i.a. rechenaufwendig. Wir suchen deshalb einen einfacheren Weg zur Koordinatengleichung der Ebene.

Dazu betrachten wir zunächst das analoge Problem für eine Gerade g in der Grundebene:

Beispiel:
g: A(0, 2) B(1, 2)
Aus der Parametergleichung
$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
erhalten wir nach Elimination des Parameters die Koordinatengleichung:
1x + **2**y - 4 = 0.
Bereits aus einem früheren Kapitel ist bekannt, dass der aus den Koeffizienten gebildete Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf dem Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ der Geraden senkrecht steht, denn für das Skalarprodukt gilt: $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$



Wir überprüfen am Einführungsbeispiel für die Ebene, ob eine analoge Eigenschaft im Raum gilt:
Tatsächlich ist der aus den Koeffizienten der Ebenengleichung gebildete Vektor
$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Richtungsvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

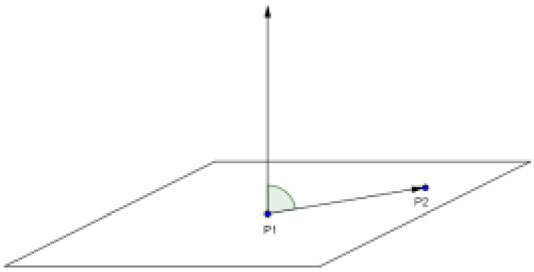
Allgemein gilt der folgende

Satz:
Jede Ebene ε im Raum kann dargestellt werden durch eine Gleichung der Form

ε: **a**x + **b**y + **c**z + d = 0 , wobei (a, b, c) ≠ (0, 0, 0).

Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Ebene ε: ax + by + cz + d = 0.

Beweis:
Idee: Es ist zu zeigen, dass der aus den Koeffizienten gebildete Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ auf dem Verbindungsvektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ zweier beliebiger Ebenenpunkte P_1 und P_2 senkrecht steht:



Sind P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte der Ebene ε: ax + by + cz + d = 0, dann erfüllen ihre Koordinaten die Ebenengleichung:

$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$
$ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0$.

Subtraktion der beiden Gleichungen führt auf

$a\cdot(x_2 - x_1) + b\cdot(y_2 - y_1) + c\cdot(z_2 - z_1) = 0$.

Diese Gleichung kann als Skalarprodukt der Vektoren $\vec{n}$ und $\overrightarrow{P_1P_2}$ aufgefasst werden, woraus die Behauptung folgt.

Umgekehrt gilt:

> Satz:
>
> Kennt man von einer Ebene ε einen Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, dann hat ihre Koordinatengleichung die Form ε: ax + by + cz + d = 0.

Beweis:

Ist die Ebene durch einen Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ und einen Punkt $A(a_1, a_2, a_3)$ gegeben, dann gilt für jeden Punkt der Ebene
$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{a}) = 0$ oder in Komponenten
$a\cdot(x - a_1) + b\cdot(y - a_2) + c\cdot(z - a_3) = 0$ oder $ax + by + cz + d = 0$ mit $d = -(aa_1 + ba_2 + ca_3)$.

Bemerkung:
- Eine Veränderung der Konstanten d bewirkt eine Parallelverschiebung der Ebene in Richtung des Normalenvektors.
- Die Koordinatengleichung einer Ebene nicht eindeutig bestimmt ist, denn der Normalenvektor kann durch ein beliebiges Vielfaches $k \cdot \vec{n}$ wo $k \neq 0$ ersetzt werden. d.h. die Gleichung kax + kby + kcz + kd = 0 mit $k \neq 0$ beschreibt dieselbe Ebene.

Aufgabe:
Von einer Kugel kennt man den Mittelpunkt M(2, 1, 3) und den Kugelpunkt T(4, 2, 5).
Gesucht ist eine Gleichung der Kugeltangentialebene τ.

Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{MT} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der gesuchten Ebene:

Damit kann die Gleichung der Ebene in der folgenden Form angesetzt werden:

τ: $2x + y + 2z + d = 0$

Die Koordinaten des Punktes $T \in \tau$ erfüllen die Ebenengleichung:

$2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + d = 0 \qquad d = -20$

τ: $2x + y + 2z + -20 = 0$

Die Koordinatengleichung einer Ebene kann also leicht angegeben werden, wenn ein Normalenvektor der Ebene bekannt ist. Ein einfacher Weg zu einem Normalenvektor führt über das Vektorprodukt.

4.4 Ein direkter Weg zur Koordinatengleichung der Ebene

Grundaufgabe:
Bestimmung der Koordinatengleichung der Ebene ε, die durch drei nicht kollineare Punkte A,B,C gegeben ist.

Der Vektor $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ist ein Normalenvektor der Ebene ABC.

Beispiel:
Koordinatengleichung der Ebene ε: durch die Punkte
A(2, 4, 3) B(2, 6, 2) C(4, 4, 2).

Die Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind Richtungsvektoren der Ebene, ihr Vektorprodukt ein Normalenvektor.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es empfiehlt sich, mit dem Skalarprodukt zu überprüfen, ob dieser Vektor auf den Richtungsvektoren senkrecht steht. Als Normalenvektor wird der Einfachheit halber $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gewählt.

Ansatz für die Ebenengleichung:

ε: x + y + 2z + d = 0

d ist so zu bestimmen, dass z.B. der Punkt A die Ebenengleichung erfüllt: d = - 12.

Gesuchte Ebenengleichung: ε: x + y + 2z - 12 = 0

Eine Ebene kann durch folgende Bestimmungsstücke festgelegt werden:
a) durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen
b) durch einen Punkt A und eine Gerade g
c) durch zwei parallele Geraden g und h
d) durch zwei sich schneidende Geraden g und h

Übungsaufgaben:
zu a): A(8, 0, 8), B(4, 12, 0), C(3, 5, 3)

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ε: x - y - 2z + 8 = 0

zu b): A(5, 2, 1), g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Tipp: der Verbindungsvektor von A mit dem Startpunkt von g ist ein Richtungsvektor

Lösung: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ε: x + 2y - 3z - 6 = 0

zu c): g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ h: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Tipp: der Verbindungsvektor der Startpunkte von g und h ist ein Richtungsvektor

Lösung: $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ ε: x + 7y - 4z + 19 = 0

zu d): g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ h: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zunächst ist zu zeigen, sich g und h im Punkt S(0, -4, 2) schneiden
Lösung: ε: 3x - 2y + z - 10 = 0

Bemerkung:
Durch zwei windschiefe Geraden ist keine Ebene bestimmt.

4.5 Spezielle Lage von Ebenen

In diesem Abschnitt soll geklärt werden, wie anhand der Koordinatengleichung einer Ebene ε: ax + by + cz + d = 0 mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ die spezielle Lage erkannt werden kann.

Falls d = 0 ist, geht die Ebene durch den Nullpunkt

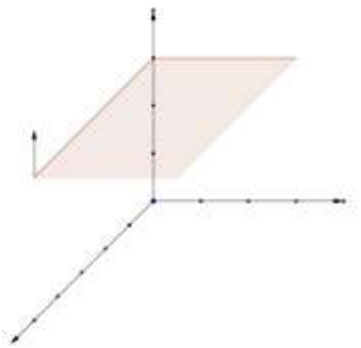
Fall 1:
Fehlen in der Ebenengleichung zwei der drei Variablen x, y, z, dann ist der Normalenvektor von ε parallel zu einer Koordinatenachse, d.h. ε ist eine Koordinatenebene oder eine dazu parallele Ebene. ε ist eine sogenannte Hauptebene.
Beispiel:

a = b = 0 ε: cz + d = 0 $z = -\frac{d}{c}$

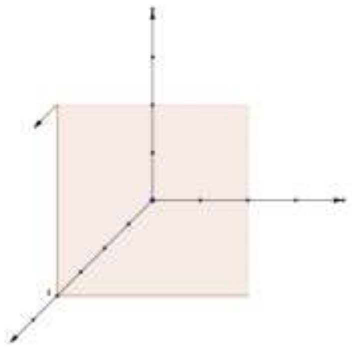
Der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ ist parallel zur z Achse

d = 0 xy-Ebene mit der Gleichung z = 0
d ≠ 0 Ebene parallel zur xy-Ebene

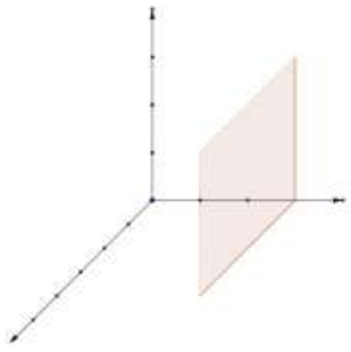
Die Koordinatengleichung schränkt die Menge der erlaubten Punkte ein. Die Gleichung z = 3 geschrieben in der Form
$0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z - 3 = 0$
schränkt nur die z-Koordinate eines Ebenenpunktes ein. Da die Koeffizienten von x bzw. y gleich 0 sind, können die x- bzw. y-Koordinaten beliebige Werte annehmen (was nicht verboten ist, ist erlaubt!?).



Ebene parallel zur yz-Ebene: x = 4



Ebene parallel zur xz-Ebene: y = 3



Fall 2
Fehlt in der Ebenengleichung eine der drei Variablen x, y, z , dann ist der Normalenvektor von ε parallel zu einer Koordinatenebene, d.h. ε ist zu einer Koordinatenachse parallel oder geht durch eine Koordinatenachse.

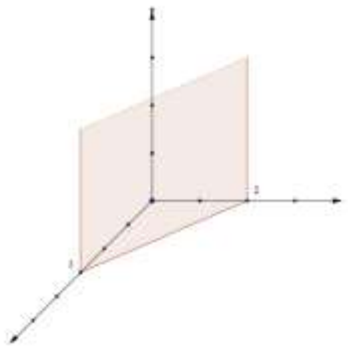
Beispiel:

c = 0 ε: ax + by + d = 0 der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ ist parallel zur xy-Ebene

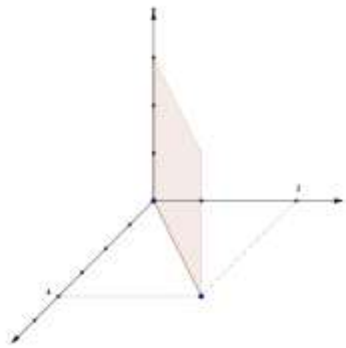
ε steht senkrecht auf der xy-Ebene bzw. parallel zur z-Achse oder geht durch die z-Achse.
ε ist eine sogenannte projizierende Ebene.

Bemerkung:
Das Nichtauftreten des z-Gliedes (c = 0) bedeutet, dass die z-Koordinate beliebig gewählt werden kann.

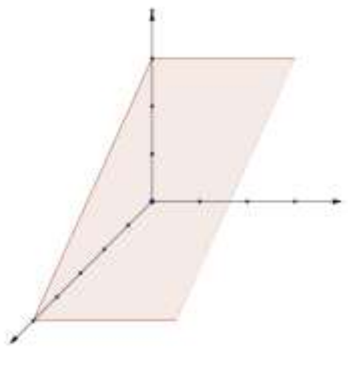
ε parallel zu z-Achse:
2x + 3y – 6 = 0



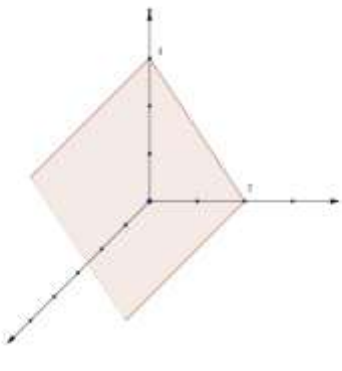
ε geht durch die z-Achse
3x – 4y = 0



ε parallel zu y-Achse:
3x + 5z -15 = 0



ε parallel zu x-Achse
3y + 2z – 6 = 0



Übungsaufgabe:
Bestimme eine Koordinatengleichung der folgenden Ebenen
a) ε enthält den Punkt A(2, 3, 7) und ist parallel zur xz-Ebene
b) ε geht durch den Punkt B(-2, 4, 5) und enthält die x-Achse
c) Für welche Punkte P(x, y, z) des Raumes gilt: x2 – y2 = 0?

Lösung a) y = 3 b) 5y – 4z = 0 c) (x + y) (x – y) = 0 Normalebenen zur xy-Ebene.