

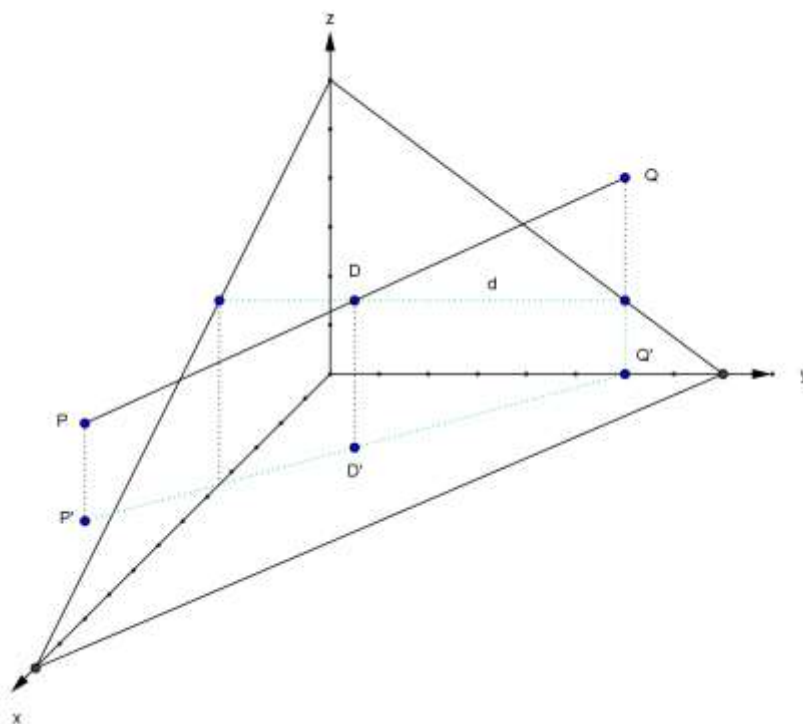
5. Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen

5.1 Gegenseitige Lage zweier Geraden (siehe Kap. 3.2)

5.2: Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene

Beispiel:

$$\varepsilon: 2x + 3y + 4z - 24 = 0 \quad g = P(6, -2, 2)Q(0, 6, 4)$$



Geometrisch: Eine Hilfsebene senkrecht zur Grundrissebene durch g schneidet die gegebene Ebene in einer Geraden d. d und g schneiden sich im gesuchten Durchstoßpunkt D.

In der Parametergleichung der Geraden ist t so zu bestimmen, dass die Koordinaten des Geradenpunktes auch die Ebenengleichung erfüllen (es handelt sich also um die Aufgabe, ein Gleichungssystem mit 4 Unbekannten x, y, z, t und 4 Gleichungen zu lösen):

$$\begin{aligned} x &= 6 - 3t \\ g: y &= -2 + 4t \quad \text{eingesetzt in die Ebenengleichung} \\ z &= 2 + t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot (6 - 3t) + 3 \cdot (-2 + 4t) + 4 \cdot (2 + t) - 24 &= 0 \\ t = 1 \text{ und damit } D(3, 2, 3). \end{aligned}$$

Das Resultat bedeutet, dass ein in P(6, -2, 2) startender Massenpunkt nach einer Zeiteinheit die Ebene erreicht.

Spezialfälle sind daran erkennbar, dass der Richtungsvektor von g auf dem Normalenvektor der Ebene senkrecht steht:

Ist g parallel zu ε dann existiert kein Schnittpunkt. In diesem Fall hat die zugehörige Gleichung die Form $0 \cdot t = k$ mit $k \neq 0$.

Liegt g in ε dann gibt es unendlich viele Schnittpunkte. In diesem Fall hat die zugehörige Gleichung die Form $0 \cdot t = 0$.

5.3: Schnitt zweier Ebenen

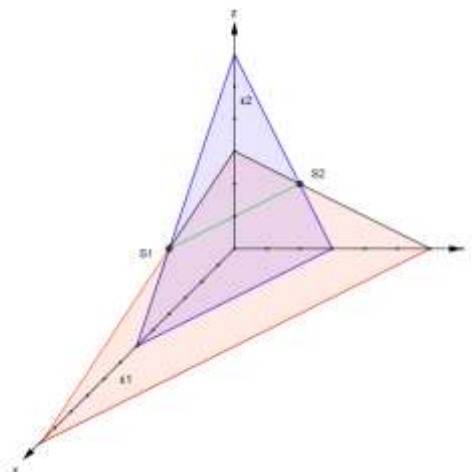
Beispiel:

$$\varepsilon_1: x + 2y + 4z - 12 = 0$$

$$\varepsilon_2: x + 2y + z - 6 = 0$$

Lösungsidee geometrisch:

Die Spuren der beiden Ebenen schneiden sich in den Punkten S_1 und S_2 , womit die Schnittgerade bestimmt ist.



Rechnerische Lösung:

Es handelt sich um das Problem, ein Gleichungssystem mit 3 Unbekannten und 2 Gleichungen zu lösen. In der Regel kann eine der Unbekannten beliebig vorgegeben werden, die anderen beiden sind dann eindeutig bestimmt.

Analog zur geometrischen Lösung suchen wir die Gleichungen der Spuren in der xz - bzw. yz -Ebene:

$$xz\text{-Ebene: } y = 0 \quad x + 4z - 12 = 0$$

$$x + z - 6 = 0 \quad \text{mit der Lösung } z = 2, x = 4 \quad S_1(4, 0, 2)$$

$$yz\text{-Ebene: } x = 0 \quad 2y + 4z - 12 = 0$$

$$2x + z - 6 = 0 \quad \text{mit der Lösung } y = z = 2 \quad S_2(0, 2, 2)$$

$$\text{Parametergleichung der Schnittgeraden } s: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Schnittgerade ist parallel zur xy -Ebene! Das heißt, dass in diesem Fall die z -Koordinate nicht beliebig vorgegeben werden kann.

Allgemein:

Da die Schnittgerade in beiden Ebenen liegt, ist der Richtungsvektor orthogonal zu den Normalenvektoren der beiden Ebenen, d.h. er hat damit Richtung $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Zweckmässigerweise wählt man folgendes Vorgehen:

1. Prüfung bei den Normalenvektoren, ob die beiden Ebenen parallel sind oder zusammenfallen.
2. Ermittlung des Richtungsvektors der Schnittgeraden mit dem Vektorprodukt.
Damit ist auch allenfalls eine spezielle Lage der Schnittgerade zu erkennen.
3. Bestimmung eines Punktes der Schnittgeraden.

Illustration an Beispielen:

1)

Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, die Ebenen schneiden sich in einer Geraden.

$$\varepsilon_1: 2x + 3y - z - 12 = 0$$

$$\varepsilon_2: x - y + 2z - 1 = 0$$

Durch das Vektorprodukt der Normalenvektoren $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = (-5) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist der

Richtungsvektor bestimmt.

Die 1. Spuren der beiden Ebenen ($z = 0$) schneiden sich in $S_1(3, 2, 0)$

Parametergleichung der Schnittgeraden: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (*)$

2)

Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, die beiden Ebenen fallen zusammen.

$$\varepsilon_1: 4x + 3y + z - 12 = 0$$

$$\varepsilon_2: -8x - 6y - 2z + 24 = 0$$

Die 2. Gleichung geht nach Division durch (-2) in die 1. Gleichung über, die beiden Ebenen fallen zusammen.

3)

Das Gleichungssystem hat keine Lösung

$$\varepsilon_1: 4x + 3y + z - 12 = 0$$

$$\varepsilon_2: -8x - 6y - 2z + 9 = 0$$

Die Normalenvektoren sind linear abhängig. Die beiden Ebenen sind parallel, aber nicht zusammenfallend.

Ausblick:

In der Linearen Algebra wird allgemein die Lösbarkeit eines Gleichungssystems mit n Unbekannten und m Gleichungen untersucht. In diesem Sinne kann das Ergebnis der vorangegangenen Aufgabe folgendermassen interpretiert werden:

Ein Gleichungssystem mit 3 Unbekannten und 2 Gleichungen hat entweder keine oder unendlich viele Lösungen.

Aufgabe:

Gesucht ist die Gleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen

$$\varepsilon_1: 3x - 3y + 2z + 3 = 0$$

$$\varepsilon_2: x + 6y + 3z - 27 = 0$$

In der folgenden Abbildung sind zusätzlich die Schnitte der Ebenen mit einem geraden Prisma dargestellt.

Die beiden Ebenen schneiden die xy-Ebene in den Geraden

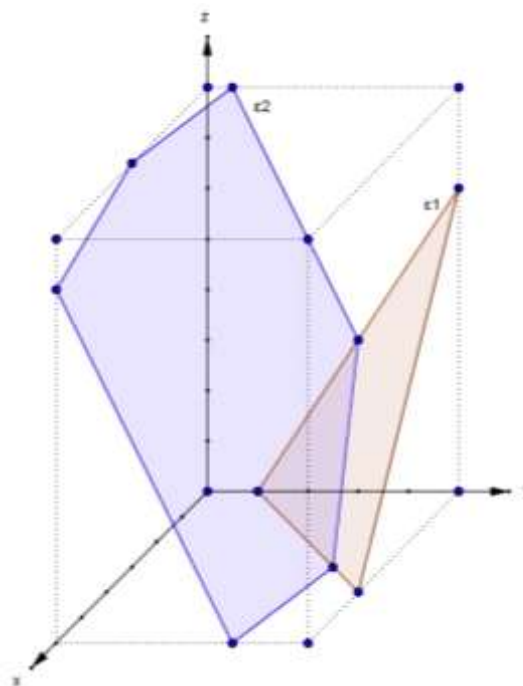
$$3x - 3y + 3 = 0$$

$$x + 6y - 27 = 0$$

Ihr Schnittpunkt $S(4, 3)$ liegt auf der Schnittgeraden. Der Richtungsvektor ist parallel zum Vektorprodukt der beiden Normalenvektoren

Gleichung der Schnittgeraden:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$



Übungsaufgabe:

Gesucht ist die Schnittgerade der beiden Ebenen:

$$\varepsilon_1: x + 2y + 3z - 9 = 0$$

$$\varepsilon_2: 2x + y + z - 6 = 0$$

Lösung:

Die Schnittgerade ist durch die Punkte $S_1(1, 4, 0)$ und $S_2(2, -1, 3)$ bestimmt

5.4: Schnitt von drei Ebenen

Aufgabe:

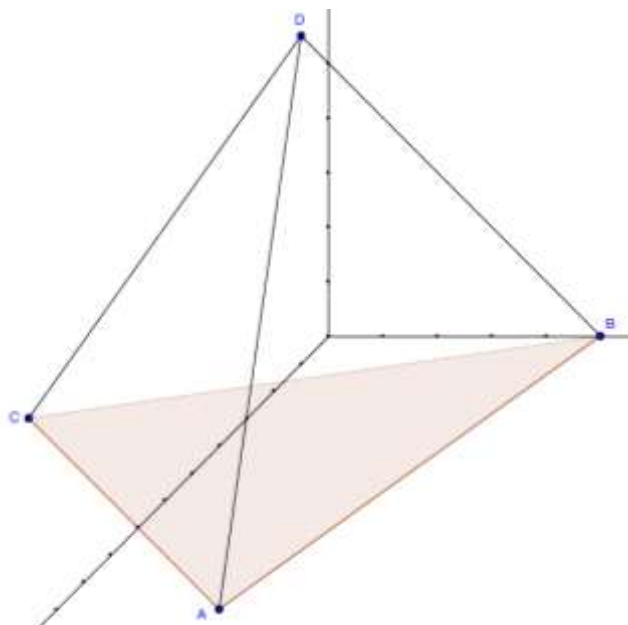
Gesucht ist der Schnittpunkt der drei Ebenen

$$\varepsilon_1: 4x + 20y + 5z - 100 = 0 \quad \varepsilon_2: 2x - 2y + z - 14 = 0 \quad \varepsilon_3: 6x + 2y - 3z - 10 = 0$$

Es handelt sich um die bekannte Aufgabe, ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten zu lösen

(→ Kap. Lineare Gleichungssysteme).

Das Gleichungssystem hat die Lösung $x = 5$, $y = 2$, $z = 8$. Damit schneiden sich die drei Ebenen im Punkt $D(5, 2, 8)$. Bestimmt man ausserdem die Schnittgeraden der drei Ebenen mit der xy -Ebene, so entsteht die abgebildete Pyramide mit der Grundfläche $A(10, 3, 0)$, $B(0, 5, 0)$ und $C(3, -4, 0)$



Übungsaufgaben:

a)

$$4x + 3y + z - 13 = 0$$

$$2x - 5y + 3z - 1 = 0$$

$$7x - y - 2z + 1 = 0$$

Elimination etwa von z

$$10x + 14y - 38 = 0 \quad | \cdot (-3)$$

$$15x + 5y - 25 = 0 \quad | \cdot 2 \quad -32y - 64 = 0$$

$$x = 1 \quad y = 2 \quad z = 3$$

Die 3 Ebenen schneiden sich im Punkt $S(1, 2, 3)$

b)

$$8x + 9y + 12z = 72$$

$$4x + 3z = 24$$

$$2x + y - z = 2$$

Die 3 Ebenen schneiden sich im Punkt $S(3, 0, 4)$

c)

Gegeben sind die Gleichungen der sich schneidenden Ebenen ε_1 und ε_2 .

Die Koeffizienten b und c der Ebene ε_3 sind so zu bestimmen, dass die drei Ebenen eine gemeinsame Schnittgerade haben.

$$\varepsilon_1: 4x + 3y + 2z + 1 = 0 \quad \varepsilon_2: x + 2y + 3z + 4 = 0 \quad \varepsilon_3: x + by + cz + 7 = 0$$

Richtungsvektor der Schnittgeraden:
$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Parametergleichung der Schnittgeraden:
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun wählt man zwei Punkte auf der Schnittgeraden z.B. (2, -3, 0) und (3, -5, 1). Ihre Koordinaten erfüllen die Gleichung der Ebene ε_3 , womit b und c bestimmt sind.

Gleichung der gesuchten Ebene ε_3 : $x + 3y + 5z + 7 = 0$

5.5: Das Transversalenproblem

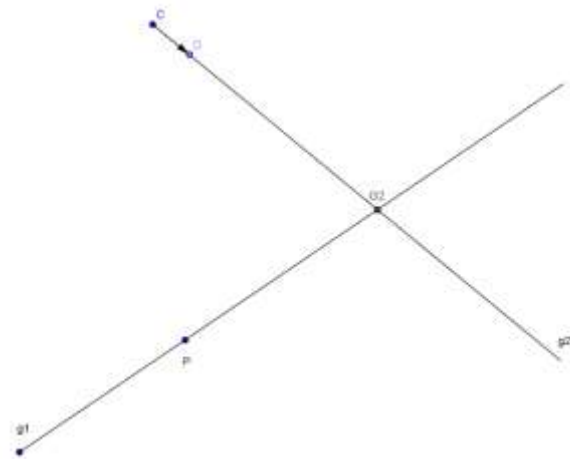
Eine Transversale t ist eine Gerade, welche zwei vorgegebene windschiefe Geraden schneidet.

Aufgabe:

Gesucht ist die Transversale t zu den Geraden $g_1 = AB$ und $g_2 = CD$, die durch den Punkt P geht.

Lösungsidee:

Die Transversale t liegt in der durch die Gerade g_1 und den Punkt P aufgespannten Ebene τ (in der Abbildung ist die Gerade g_1 und damit auch τ projizierend dargestellt). Der Punkt G_2 auf der Geraden g_2 ist der Schnittpunkt der Geraden g_2 mit der Ebene τ .



Beispiel:

$g_1 = A(-5, 0, 2) B(-4, 1, 3)$, $g_2 = C(2, 4, 0) D(3, 2, 2)$, $P(-3, 5, 8)$.

Die Ebene τ ist durch den Punkt A und die Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

festgelegt. $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von τ .

Koordinatengleichung von τ : $x - 4y + 3z - 1 = 0$

Die Ebene τ ist mit der Geraden g_2 : $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ zu schneiden:

$G_2(3, 2, 2)$

$\overrightarrow{G_2P} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist ein Richtungsvektor von t .

Die gesuchte Transversale t hat damit die Gleichung t : $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Kontrolle:

Es ist zu überprüfen, ob t die Gerade g_1 schneidet. Tatsächlich schneidet t die Gerade g_1 im Punkt $G_1(-1, 4, 6)$

Aufgabenvariante:

Transversale mit vorgegebener Richtung (siehe auch kürzester Abstand zweier Geraden).

Aufgabe:

Gegeben ist die Gerade g . Gesucht ist die Transversale t mit vorgegebener Richtung, welche die Gerade g und die y -Achse schneidet.

$$g = A(0, 0, -12) B(4, 2, -8), \text{ Richtungsvektor } \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Die Transversale liegt in der Ebene mit dem Normalenvektor } \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und der Gleichung: $x + z = 0$. Sie schneidet die Gerade g im Punkt $G(6, 3, -6)$ und die y -Achse im Punkt $Y(0, 3, 0)$.

$$\text{Die gesuchte Transversale } t \text{ hat damit die Gleichung } t: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$