8 Ortsaufgaben:

8.1: Mittelnormalebene

Die Punkte des Raumes, die von zwei gegebenen Punkten A und B gleichen Abstand haben, liegen in einer Ebene mit dem Normalenvektor $\overrightarrow{AB}$, die durch den Mittelpunkt Z der Strecke AB geht. Diese Ebene heisst Mittelnormalebene der Strecke AB (als Gegenstück zur Mittelsenkrechten in der Grundebene).

Aufgabe:
Von einer Kugel mit Mittelpunkt M auf der y-Achse kennt man die
Punkte A(1, 2, 3) und B(3, 6, -5)

Der Kugelmittelpunkt M liegt in der Mittelnormalebene μ der Strecke AB.
Koordinaten des Mittelpunkts Z der Strecke AB:

$\vec{z} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ Z(2, 4, -1)

Normalenvektor der μ:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Ansatz
μ: x + 2y – 4z + d = 0
Z(2, 4, -1) $\in$ μ ergibt d = -14

μ: x + 2y – 4z - 14 = 0
Da M auf der y-Achse liegt gilt wegen
x = z = 0 2y - 14 = 0
Gesuchter Mittelpunkt M(0, 7, 0)

Kugelradius $r = \left|\overrightarrow{AM}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{35}$

Lösungsvariante:
Der gesuchte Kugelmittelpunkt M(0, y, 0) erfüllt die Bedingung:

$\left|\overrightarrow{AM}\right|^2 = \left|\overrightarrow{BM}\right|^2$

Übungsaufgaben:
a)
Vom gleichschenkligen Dreieck ABC kennt man die Basis A(-6, 9, 5) B(2, 1, 1). Gesucht ist die Ecke C, die auf der Geraden g durch die Punkte P(-3, 11, 13) und Q(7, 6, 3) liegt.

Lösung:
C liegt in der Mittelnormaleben von AB und auf der Geraden g:
μ: $2x - 2y - z + 17 = 0$ C(3, 8, 7)

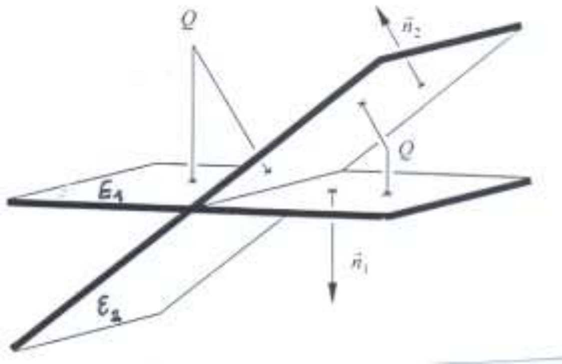
b)
Gesucht sind der Mittelpunkt M und der Radius r einer Kugel, welche durch den Punkt P(7, 3, 9) geht und die Ebene ε: $2x - y - 2z + 25 = 0$ im Punkt $Q(-3, 5, z_Q)$ berührt.

Tipp:
M liegt
- in der Mittelnormalebene von P und Q
- auf dem Lot zu ε durch Q

Lösung: M(3, 2, 1) $r = 9$

8.2: Winkelhalbierende Ebenen, Mittelparallelebene

Wir betrachten zwei sich schneidende Ebenen
$\varepsilon_1 : \vec{n}_1 \cdot \vec{r} - d_1 = 0$ und $\varepsilon_2 : \vec{n}_2 \cdot \vec{r} - d_2 = 0$ mit
$|\vec{n}_1| = |\vec{n}_2| = 1$
und fragen nach der Menge der Punkte Q des Raumes, die von den beiden Ebenen gleichen Abstand haben.



Nach der Hesse'schen Abstandsformel bedeutet dies, dass für den Ortsvektor $\vec{r}$ von Q gilt:

$$|\vec{n}_1 \cdot \vec{r} - d_1| = |\vec{n}_2 \cdot \vec{r} - d_2|$$

Die Gleichheit der Beträge bedeutet, dass die Terme gleich oder entgegengesetzt gleich sind:
$\vec{n}_1\vec{r} - d = \vec{n}_2\vec{r} - d_2$ oder
$\vec{n}_1\vec{r} - d = -(\vec{n}_2\vec{r} - d_2)$ bzw. kurz:

$$(\vec{n}_1 \pm \vec{n}_2) \cdot \vec{r} = d_1 \pm d_2$$

Die gesuchten Punkte liegen in zwei Ebenen, den sogenannten **winkelhalbierenden Ebenen** von ε_1 und ε_2. Man erhält ihre Gleichungen, indem man die Gleichungen der gegebenen Ebenen addiert bzw. subtrahiert (sofern die beiden Normalenvektoren Einheitsvektoren sind).

Illustration an einem Beispiel:
ε_1: x - 2y + 2z -3 = 0
ε_2: x + 4y - 8z + 5 = 0

$$\frac{x - 2y + 2z - 3}{3} = \pm \frac{x + 4y - 8z + 5}{9}$$

ω_1: x - 5y + 7z - 7 = 0 bzw. ω_2: 2x - y - z - 2 = 0.

Bemerkungen:
Die beiden Ebenen stehen senkrecht aufeinander, denn:
$(\vec{n}_1 + \vec{n}_2) \cdot (\vec{n}_1 - \vec{n}_2) = \vec{n}_1^2 - \vec{n}_2^2 = 0$

Kontrolle: $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

Die winkelhalbierenden Ebenen sind das Gegenstück zu den Winkelhalbierenden zweier Geraden in der Grundebene.

Die analoge Überlegung für zwei parallele Ebenen führt auf die sogenannte **Mittelparallelebene**.

Beispiel:
ε_1: 3x - 2y + 6z -19 = 0
ε_2: 3x - 2y + 6z + 9 = 0

Die Ortsbedingung für die Mittelparallelebene:
3x - 2y + 6z -19 = -(3x - 2y + 6z + 9)

führt auf die Gleichung der Mittelparallelebene: 3x - 2y + 6z - 5 = 0.

Aufgabe:
Gesucht sind der Mittelpunkt M und der Radius einer Kugel k mit den folgenden Eigenschaften:
- k berührt die xy-Ebene
- k berührt die Ebene τ: x + 2y + 2z -30 = 0 im Punkt T(2, 4, 10).

Der Mittelpunkt liegt in den beiden winkelhalbierenden Ebenen mit den Gleichungen:
$$\pm z = \frac{x+2y+2z-30}{3}$$
ω_1: x + 2y - z - 30 = 0 ω_2: x + 2y + 5z - 30 = 0
und auf dem Lot *l* in T auf τ:
$$l:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das Lot l schneidet die winkelhalbierenden Ebenen in den beiden gesuchten Mittelpunkten
1. Lösung: $M_1(0, 0, 6)$ und $r_1 = 6$
2. Lösung: $M_2(12, 24, 30)$ und $r_2 = 30$.

Variante des Lösungswegs:
Für die z-Koordinate eines Punktes auf dem Lot l gilt: z = 10 + 2t
Der Kugelradius r bzw. dessen Quadrat r^2 kann auf zwei Arten berechnet werden:
Da k die xy-Ebene berührt, ist
$$z^2 = (10+2t)^2 \qquad (1)$$
Von T aus erreicht man den gesuchten Mittelpunkt indem man eine Strecke der Länge r abträgt. Für den Abstand des Punktes M von T gilt damit
$$(3|t|)^2 = 9t^2 = (10+2t)^2 \qquad (2)$$
Gleichsetzen von (1) und (2) ergibt:
3t = 10+2t oder -3t = 10+2t oder also $t_1 = 10$ bzw. $t_2 = -2$ mit den bereits bekannten Lösungen.

Die folgenden mit (*) bezeichneten Aufgaben sind etwas aufwändiger:

Aufgabe (*):
Eine Pyramide hat die Grundfläche A(-12, 0, -2) B(12, -12, -2) C(0, 12, –2) und die Spitze S(-4, 4, 6). Dieser Pyramide wird eine Kugel einbeschrieben. Gesucht sind das Zentrum und der Radius der Inkugel.

Vorbemerkung:
Bei der Bestimmung des Abstands nach Hesse ist zu beachten, dass sich - je nach Lage des Punktes in den zwei Halbräumen - der Abstand mit positivem oder negativem Vorzeichen ergibt.

Ebene ABC:	$z + 2 = 0$	S liegt auf der "positiven" Seite der Ebene
Ebene ABS	$x + 2y - 2z + 8 = 0$	C liegt auf der "positiven" Seite der Ebene

"innere" winkelhalbierende Ebene:
$3z + 6 = x + 2y - 2z + 8$ bzw. $\quad x + 2y - 5z + 2 = 0$

Ebene ABC: $z + 2 = 0$
Ebene ACS: $2x - 2y - z + 22 = 0$
"innere" winkelhalbierende Ebene: $\quad x - y - 2z + 8 = 0$

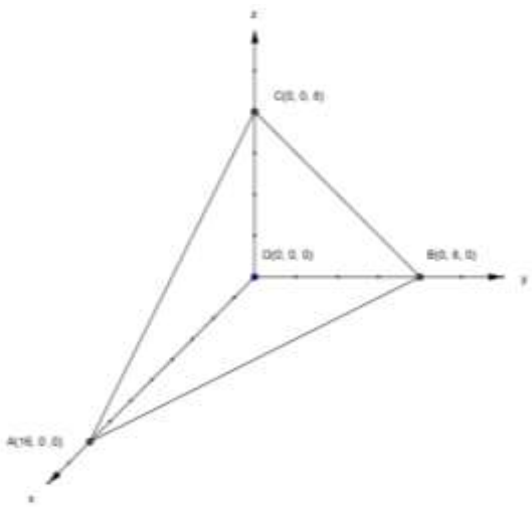
Ebene ABC: $z + 2 = 0$
Ebene BCS: $2x + y + 2z - 8 = 0$
"innere" winkelhalbierende Ebene: $\quad 2x + y + 5z - 2 = 0$
A liegt auf der „negativen“ Seite von BCS.

Die Schnittgerade der beiden ersten winkelhalbierenden Ebenen

s: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ schneidet die dritte winkelhalbierende Ebene im Punkt M(-3, 3, 1)

Ergebnis:
Mittelpunkt der Inkugel M(-3, 3, 1) Radius r = 3 als Abstand des Mittelpunkts M von der Ebene ABC.

Übungsaufgabe:
Gegeben ist die abgebildete Pyramide ABCD.
Gesucht sind Mittelpunkt und Radius ihrer Inkugel.



Lösung:
Gleichung der Ebene ABD:
τ: $x + 2y + 2z - 16 = 0$
Da die Kugel die drei Koordinatenebenen berührt, haben die Koordinaten des Kugelmittelpunkts die spezielle Form M(r, r, r).
Der Abstand von M zu τ muss mit r übereinstimmen:

$r = -\dfrac{r + 2r + 2r - 16}{3}$ mit der Lösung

M(2, 2, 2), r = 2
Das Minuszeichen ergibt sich, da M auf der negativen Seite von τ liegt.