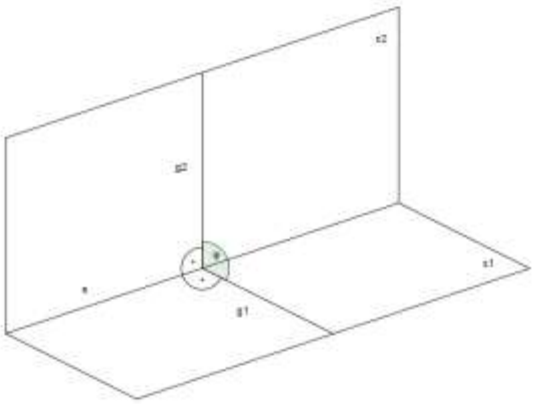
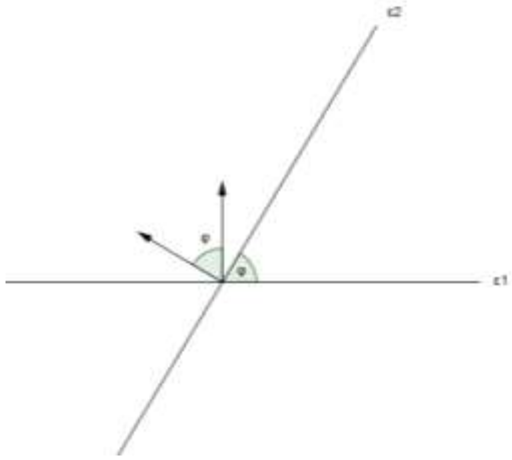
6. Winkelprobleme

6.1 Winkel zwischen zwei Ebenen





Unter dem Schnittwinkel φ zweier nicht paralleler Ebenen ε_1 und ε_2 versteht man den nicht stumpfen Winkel, der von zwei sich schneidenden Geraden $g_1 \in \varepsilon_1$ und $g_2 \in \varepsilon_2$ gebildet wird, die auf der Schnittgeraden s senkrecht stehen. Da die Normalenvektoren der beiden Ebenen den gleichen Winkel φ oder dessen Ergänzung auf 180° einschliessen, gilt gemäss Definition des Skalarprodukts:

$\cos\varphi = \dfrac{\lvert\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\rvert}{\lvert\vec{n}_1\rvert \cdot \lvert\vec{n}_2\rvert}$	**Spitzer Schnittwinkel φ zweier Ebenen mit den Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$**

Bemerkung:
Wegen des Betragszeichens im Zähler ist φ nicht stumpf.
Die Formel ist auch für parallele Ebenen richtig.

Beispiel:

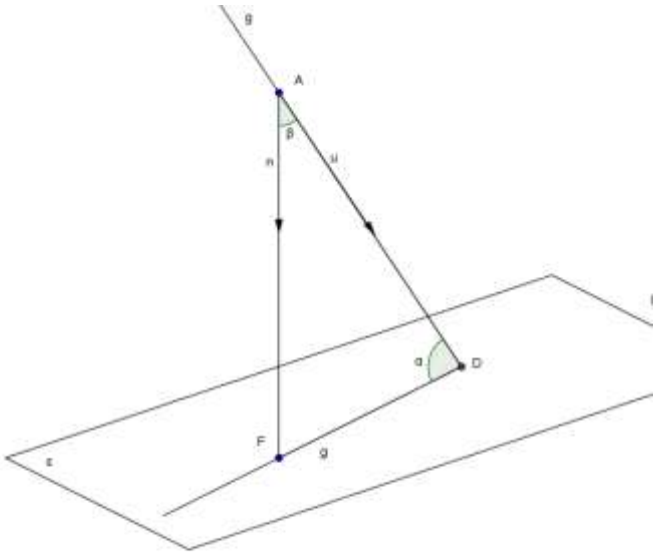
ε_1: x - 2y + 3z - 1 = 0 $\quad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \lvert\vec{n}_1\rvert = \sqrt{14}$

ε_2: 2x + 3y -z +6 = 0 $\quad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \lvert\vec{n}_2\rvert = \sqrt{14}$

$\cos\alpha = \dfrac{\lvert -7 \rvert}{14} = \dfrac{1}{2} \qquad \alpha = 60°$

Beim Schleifen von Edelsteinen ist für die Leuchtkraft entscheidend, dass die Facettenebenen mit der Durchmesserebene genau vorgegebene Winkel einschliessen. Ausserdem müssen die Grössen der Facetten zueinander in bestimmten Verhältnissen stehen.

6.2 Neigungswinkel einer Geraden g bezüglich einer Ebene



Unter dem Neigungswinkel α einer Geraden g bezüglich einer Ebene ε versteht man den nicht stumpfen Winkel zwischen g und der Normalprojektion $\overline{g}$ auf ε.

Der Winkel zwischen dem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene ε und dem Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden kann spitz, 90° oder stumpf sein. In jedem Fall gilt:

$$\cos\beta = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}$$

Wegen $\alpha = 90° - \beta$ bzw. $\beta = 90° - \alpha$ folgt:
$\cos\beta = \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$

Damit gilt:

$\sin\alpha = \frac{\lvert\vec{u}\cdot\vec{n}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{n}\rvert}$	Neigungswinkel α einer Geraden g mit dem Richtungsvektor $\vec{u}$ bezüglich einer Ebene ε mit dem Normalenvektor $\vec{n}$.

Beispiel:

g: $\vec{r} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

ε: 2x + 3y +6z -12 = 0 $\quad \vec{u} = \begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$

$$\sin\alpha = \frac{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}}{3\cdot 7} = \frac{20}{21}$$ $\quad \alpha = 72.3°$