

9. Der Kreis

9.1 Die Koordinaten- und Parameterform der Kreisgleichung

Definition:

Unter dem Kreis k mit Mittelpunkt $M(u, v)$ und Radius R versteht man die Menge aller Punkte $P(x, y)$ die von M den Abstand R haben, für die also gilt:

$$|\overline{MP}| = R \Leftrightarrow |\overline{MP}|^2 = R^2$$

oder in Koordinaten:

$$k: (x - u)^2 + (y - v)^2 = R^2 \quad (1) \quad \text{Koordinatengleichung eines Kreises}$$

$M(u, v)$ Kreismittelpunkt, R Radius,
 $P(x, y)$ Kreispunkt

$$k: x^2 + y^2 = R^2$$

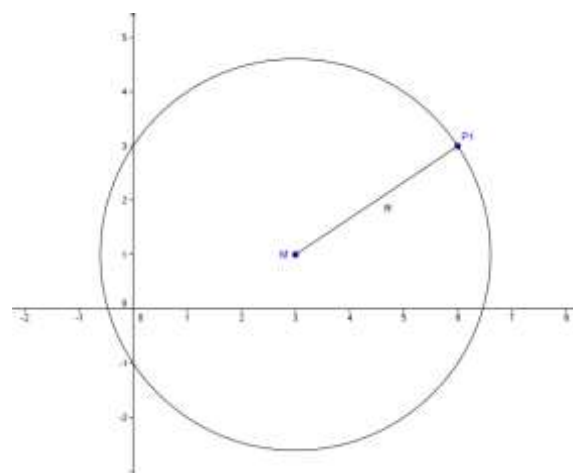
Spezialfall: $M(0, 0)$

Beispiel: (\rightarrow Abbildung)

Gleichung des Kreises mit Zentrum $M(3, 1)$
durch den Punkt $P(6, 3)$.

$$\overline{MP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad R = |\overline{MP}| = \sqrt{13}$$

$$k: (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 13$$



Durch Ausmultiplizieren von Gleichung (1)
erhält man eine Gleichung der Form

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad (2)$$

Umgekehrt kann jede Gleichung der Form (2) durch quadratische Ergänzung auf die Form (1) gebracht werden und stellt somit einen Kreis dar (allenfalls mit Radius 0 oder imaginärem Radius).

Beispiel:

Die Gleichung $x^2 + y^2 - 14x + 6y + 22 = 0$ kann durch quadratische Ergänzung auf die folgende Form gebracht werden:

$$(x - 7)^2 + (y + 3)^2 = 36$$

Die Gleichung stellt also einen Kreis mit Mittelpunkt $M(7, -3)$ und Radius $R = 6$ dar.
Allgemein gilt der folgende

Satz:

Die Gleichung $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ stellt genau dann einen Kreis dar, wenn gilt:
 $a^2 + b^2 - 4c > 0$

Führt man als Parameter den Zentriwinkel t ein, so erhält man die sogenannte Parametergleichung des Kreises:

$$\begin{array}{l} x - u = R \cdot \cos t \\ y - v = R \cdot \sin t \end{array} \quad (3) \quad \text{Parametergleichung des Kreises}$$

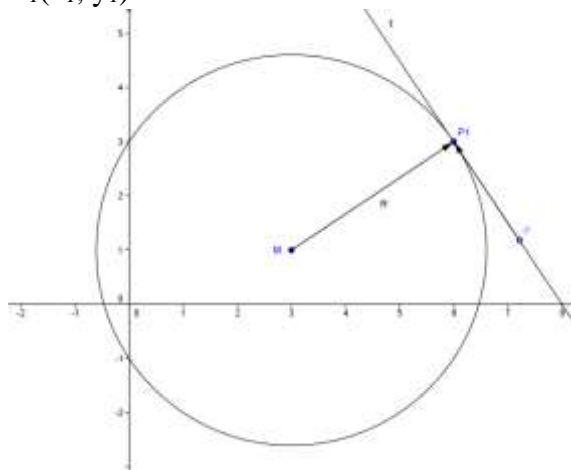
Eliminiert man den Parameter t , indem man die Quadrate der beiden Gleichungen addiert, so erhält man wieder die Koordinatengleichung (1) des Kreises.

9.2. Kreistangenten

1.

Tangente in einem vorgegebenen Kreispunkt Punkt $P_1(x_1, y_1)$

$\overrightarrow{MP_1}$ ist ein Normalenvektor der Tangente t ,
 $\overrightarrow{PP_1}$ steht auf $\overrightarrow{MP_1}$ senkrecht.



Im Spezialfall $M(0, 0)$ gilt also:

$$\overrightarrow{PP_1} \cdot \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = (x - x_1) \cdot x_1 + (y - y_1) \cdot y_1 = 0 \quad \text{vereinfacht}$$

$$x_1 x + y_1 y = x_1^2 + y_1^2 = R^2$$

$$t: x_1 x + y_1 y = R^2 \quad (4) \quad \text{Gleichung der Kreistangente im Punkt } P_1(x_1, y_1)$$

Der Spezialfall zeigt, wie die Tangentengleichung formal aus der Kreisgleichung erhalten werden kann:

$$x^2 + y^2 = R^2 \rightarrow xx + yy = R^2 \rightarrow xx_1 + yy_1 = R^2$$

Dieser formale Vorgang heisst **Polarisieren**. Es kann gezeigt werden, dass auch bei beliebigem Mittelpunkt und auch für Kegelschnitte, die Tangentengleichung durch Polarisieren bestimmt werden kann.

2.

Kreistangente mit vorgegebener Richtung

Aufgabe:

Gegeben ist der Kreis k mit Mittelpunkt $M(2, 5)$ und Radius $R = 4$.gesucht sind die Tangenten, welche zur Geraden $g: 4x - 3y + 12 = 0$ parallel sind.

Ansatz für die gesuchten Tangenten.

$$t: 4x - 3y + c = 0$$

 c ist so zu bestimmen, dass der Punkt M von t den Abstand 4 hat:

$$\frac{|4x - 3y + c|}{5} = 4 \quad \text{Lösungen: } c_1 = 27, c_2 = -13$$

Lösungsvariante: Diskriminantenmethode

3..

Tangente von einem Punkt A an einen Kreis k

Diese Aufgabe kann mit den folgenden Verfahren bestimmt werden:

- Diskriminantenmethode
- Hesse'sche Normalform (HNF)
- Polarenmethode

Spezialfall A(0,0)a) Lösung des Tangentenproblems mit der **Diskriminantenmethode**:Das Problem, eine Gerade mit einem Kreis k zu schneiden, führt auf eine quadratische Gleichung mit der Diskriminante D .

3 Fälle:

- $D > 0$ g ist Sekante
- $D = 0$ g ist Tangente
- $D < 0$ g meidet k

Aufgabe:

Vom Nullpunkt aus sind die Tangenten an den Kreis $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$ zu legen.Der Ansatz für $t: y = mx$ wird in die Kreisgleichung

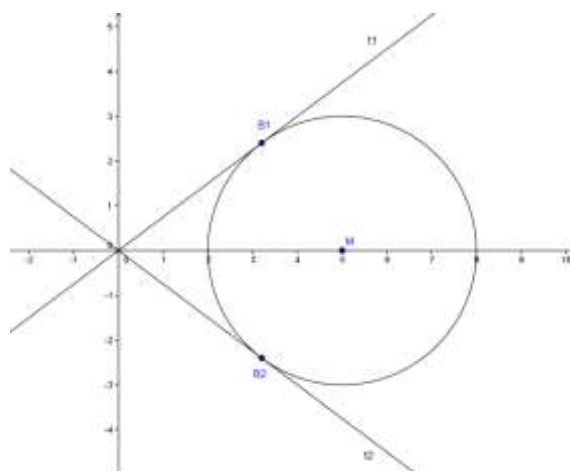
$$x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0 \text{ eingesetzt}$$

$$x^2 (m^2 + 1) - 10x + 16 = 0 \quad (4)$$

 t ist genau dann Tangente, wenn die Diskriminante von (4) verschwindet.

$$D = 36 - 64m^2 = 0 \text{ und daraus } m = \pm \frac{3}{4}$$

Beachte: Diese Methode ist in vielen Fällen sehr rechenaufwändig.



b)

Lösung mit der HNF im Spezialfall A(0,0):Die Gleichung $y = mx$ wird auf die Hessesche Normalform (HNF) gebracht:

$$\frac{mx - y}{\sqrt{m^2 + 1^2}} = 0$$

Die Steigung m ist so zu wählen, dass der Kreismittelpunkt $M(5, 0)$ von den Tangenten den Abstand $R = 3$ hat:

$$\frac{5m}{\sqrt{m^2 + 1^2}} = \pm 3 \Leftrightarrow \left(\frac{5m}{\sqrt{m^2 + 1^2}} \right)^2 = 9 \text{ oder } 25m^2 = 9m^2 + 9 \text{ und erneut: } m = \pm \frac{3}{4}$$

Lösung des Problems für eine beliebige Lage von A:

Aufgabe:

Vom Punkt $P(-4,3)$ sind die Tangenten an den Kreis $k: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ zu legen.

Lösung mit der Hesse'schen Normalform:

Mit quadratischer Ergänzung ergibt sich für k der Mittelpunkt $M(1, -2)$ und der Radius $R = \sqrt{10}$ Ansatz für $t: y = mx + q$ Da $P(-4, 3)$ die Tangentengleichung folgt: $q = 3 + 4m$.

$$\text{HNF von } t: \frac{mx - y + 4m + 3}{\sqrt{m^2 + 1^2}} = 0$$

Die gesuchten Kreistangenten haben von $P(-4,3)$ den Abstand $R = \sqrt{10}$

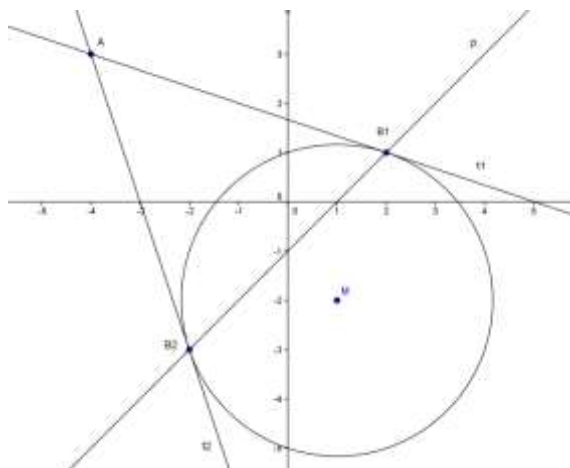
Die Gleichung

$$\left(\frac{m + 2 + 4m + 3}{\sqrt{m^2 + 1^2}} \right)^2 = 10$$

 $5 \cdot (3m^2 + 10m + 3) = 0$ hat die Lösungen $m_1 = -3$ und $m_2 = -\frac{1}{3}$

Lösung der Aufgabe nach der Polarentheorie

Setzt man in der Tangentengleichung statt eines Kreispunktes einen Punkt A ausserhalb des Kreises ein, so stellt die Gleichung wieder eine Gerade p dar. Es seien B₁ und B₂ die Berührungspunkte der Tangenten mit dem Kreis. Es kann gezeigt werden, dass p die Verbindungsgerade der Punkte Berührungspunkte B₁ und B₂ ist. Die Aufgabe ist damit darauf zurückgeführt, die Polare mit dem Kreis k zu schneiden.



Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$$

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 - (x + x_1) + (2y + 2y_1) - 5 = 0$$

$$x \cdot (-4) + y \cdot 3 - (x - 4) + (2y + 2 \cdot 3) - 5 = 0$$

$$y = x - 1$$

mit dem Kreis schneiden

$$x^2 = 4$$

polarisieren

Koordinaten von A(-4,3) einsetzen

vereinfachen

Gleichung der Polaren

Berührungspunkte B₁(2,1), B₂(-2,-3)