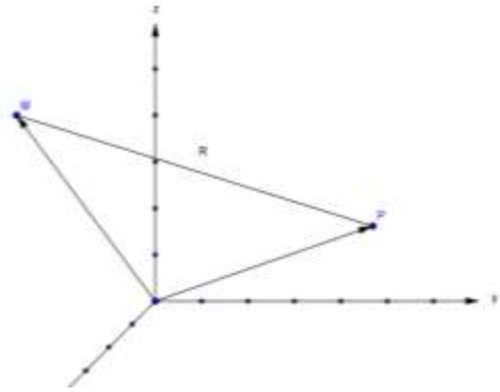
10. Die Kugel

10.1 Die Kugelgleichung

Definition:
Unter der Kugel k mit Mittelpunkt M und Radius R verstehen wir die Menge aller Punkte P, die vom Mittelpunkt M einen vorgegebenen Abstand R haben, für die also gilt:

$\left|\overrightarrow{MP}\right| = R \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MP}\right|^2 = R^2$

oder in Koordinaten:



k: $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = R^2$	(1)	Kugelgleichung $M(x_M, y_M, z_M)$ Kugelmittelpunkt R Radius, P(x, y, z) Kugelpunkt	

Beispiel:
Gleichung der Kugel mit Zentrum M(3, -2, 1), die den Punkt P(1, 4, 4) enthält.

$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad R = \left|\overrightarrow{MP}\right| = 7$ $\qquad$ k: $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 49$

Zusatzfragen:
a)
In welchen Punkten schneidet k die z-Achse?

x = y = 0 $\qquad$ $9 + 4 + (z - 1)^2 = 49$

$|z - 1| = 6$ führt auf die Schnittpunkte $\qquad$ $S_1(0, 0, 7)$ $S_2(0, 0, -5)$

b)
Welche die Kugelpunkte liegen in der xy-Ebene

z = 0 $\qquad$ $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (-1)^2 = 49$

$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 48$

k schneidet die xy-Ebene in einem Kreis mit Mittelpunkt Z(3, -2) und Radius $\rho = \sqrt{48}$

Multipliziert man die Gleichung (1) aus, so erhält eine Gleichung der Form:

$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$	(2)	Kugelgleichung 2. Form

Umgekehrt kann jede Gleichung der Form (2) durch quadratische Ergänzung auf die Form (1) gebracht werden und stellt somit eine Kugel dar (allenfalls mit Radius 0 oder imaginärem Radius).

Beispiel:
Die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 8y - 4z - 4 = 0$ kann in der folgenden Form dargestellt werden:

$x^2 - 2x + \mathbf{1^2} + y^2 + 8y + \mathbf{4^2} + z^2 - 4z + \mathbf{2^2} = 4 + \mathbf{1^2} + \mathbf{4^2} + \mathbf{2^2} = 25$ bzw.
$(x - 1)^2 + (y + 4)^2 + (z - 2)^2 = 25$ Kugel mit Mittelpunkt M(1, -4, 2) Radius R = 5

Weitere Beispiele:

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z - 35 = 0$	M(2, -3, 1) Radius R = 7
$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 10z + 26 = 0$	M(2, -1, 5) Radius R = 2
$x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y - 4z + 5 = 0$	M(-3, 1, 2) Radius R = 3

10.2. Schnitt einer Geraden mit einer Kugel, Kugeltangente

Aufgabe:
In welchen Punkten schneidet die Gerade

$$g: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

die Kugel k: Mittelpunkt M(3, 1, -2), Radius R = 7?

Setzt man die Koordinaten eines Geradenpunktes in die Kugelgleichung
k: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 49$
ein, so führt dies auf die quadratische Gleichung $t^2 = 1$.

Die gesuchten Schnittpunkte sind $S_1(5, -2, 4)$, $S_2(-3, 4, 0)$.

Allgemein,
Das Problem, eine Kugel mit einer Geraden zu schneiden, führt auf eine quadratische Gleichung im Parameter t mit der Diskriminante D.

3 Fälle:

$D > 0$	g schneidet k in zwei verschiedenen Punkten
$D = 0$	g ist Kugeltangente
$D < 0$	g meidet die Kugel

Aufgabe:

Die Gerade $g: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist Tangente einer Kugel k mit Mittelpunkt M(3, 2, 4).

Gesucht ist der Kugelradius R und der Berührungspunkt B der Tangente t mit der Kugel k.

Das Problem ist eine Einkleidung der Grundaufgabe, den kürzesten Abstand eines Punktes von einer Geraden zu bestimmen.

Mögliche Lösungswege (siehe auch den Abschnitt „Abstand eines Punktes von einer Geraden“):

1. Variante

Der Punkt B auf g ist so zu bestimmen, dass der Vektor $\overrightarrow{MB}$ auf der Geraden g, d.h. auf dem Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden, senkrecht steht.

$$\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} t-3 \\ 1+t-2 \\ 5-2t-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-3 \\ t-1 \\ 1-2t \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{MB} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} t-3 \\ t-1 \\ 1-2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 6t-6=0 \qquad t = 1$$

Berührungspunkt B(1, 2, 3) Radius $R = \left|\overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{5}$

2. Variante

Der Berührungspunkt B ist der Schnittpunkt der Normalebene ν zu t durch M mit der Geraden g.

Der Richtungsvektor $\vec{u}$ von g ist ein Normalenvektor von ν

Ansatz für ν: x + y – 2z + d = 0

M(3, 2, 4) ∈ ν d = 3 ν: x + y – 2z + 3 = 0

Schneidet man ν mit g, so führt dies auf t = 1

Berührungspunkt B(1, 2, 3), und Radius R = $\sqrt{5}$

3. Variante:
Ist nur der Radius R gesucht, so kann man auch folgendermassen vorgehen:

Der Vektor $\overrightarrow{MA}$ (A ist der Anfangspunkt der Geraden g) und der Richtungsvektor $\vec{u}$ von g spannen ein Parallelogramm auf. Sein Flächeninhalt kann einerseits elementar (Grundlinie $|\vec{u}|$, Höhe R) und andrerseits mit dem Vektorprodukt berechnet werden.

Damit gilt:

$$R \cdot |\vec{u}| = |MA \times \vec{u}| \qquad R = \frac{|MA \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

$$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{MA} \times \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{MA} \times \vec{u}\right| = \sqrt{30} \qquad R = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5}$$

Übungsaufgabe:

Kugelmittelpunkt M(-3, 5, -4), Tangente $g: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lösung:
Kugelradius: R = 7

10.3. Schnitt einer Kugel mit einer Ebene, Kugeltangentialebene

Die Tangentialebene τ der Kugel k(M, r) im Kugelpunkt T steht auf dem Berührungsradius senkrecht. $\overrightarrow{MT}$ ist also ein Normalenvektor von τ.

Aufgabe:
Gegeben ist die Kugel k durch den Mittelpunkt M(2, -4, 3) und den Radius R = 6
Welche Kugeltangentialebenen sind zu der Ebene ε: $2x - y + 2z - 10 = 0$ parallel?

Die Berührungspunkte B der beiden Tangentialebenen mit der Kugel haben vom Kugelmittelpunkt M den Abstand R. Sie liegen auf dem Lot *l* zu ε durch M im Abstand R von M.

$$l: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \vec{u}$$

Da der Richtungsvektor des Lots $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ die Länge 3 hat, sind die zu den Berührungspunkten gehörigen Parameterwerte $t_1 = 2$ und $t_2 = -2$.

Berührungspunkt $T_1(6, -6, 7)$ Tangentialebene τ_1: $2x - y + 2z - 32 = 0$.
Berührungspunkt $T_2(-2, -2, -1)$ Tangentialebene τ_2: $2x - y + 2z + 4 = 0$.

Lösungsvariante mit HNF:
Ansatz für $\tau_{1,2}$: $2x - y + 2z + d = 0$

Der Parameter d ist so zu bestimmen, dass der Kugelmittelpunkt M von der Tangentialebene den Abstand R hat.

$$\frac{|2 \cdot 2 - (-4) + 2 \cdot 3 + d|}{3} = 6 \qquad |d + 14| = 18 \qquad d = 4 \text{ oder } d = -32$$

Anwendung: Reflexion eines Lichtstrahls an einer Kugel

Gegeben ist die Kugel durch den Mittelpunkt M und den Kugelpunkt T. Ein von L ausgehender Lichtstrahl wird an der Kugel in T reflektiert. Wo trifft der reflektierte Strahl die xy-Ebene?

Tipp: Reflexion an der Tangentialebene in T

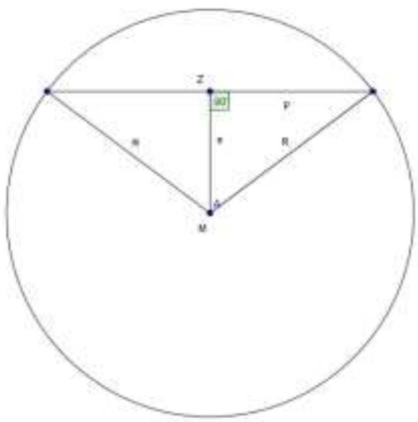
Beim **Schnitt einer Kugel k(M, R) mit einer Ebene ε**

Es können 3 Fälle auftreten:

Sei e der Abstand des Mittelpunkts M von der Ebene ε

e > R	ε meidet k
e = R	ε ist Tangentialebene
e < R	ε schneidet aus der Kugel einen Kreis mit Mittelpunkt Z und Radius ρ
	Z ist der Schnittpunkt des Lots aus M auf ε
	ρ ergibt sich nach Pythagoras zu $\rho = \sqrt{R^2 - e^2}$

Beispiel:
k: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 225$
ε: $x + 2y + 2z - 30 = 0$



M(3, -1, 1) hat von ε den Abstand e = 9
Mittelpunkt des Schnittkreis
Z(6, 5, 7), ρ = 12