Vektorrechnung 1

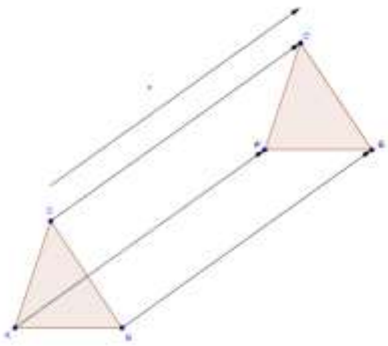
1. Skalare, vektorielle Grössen

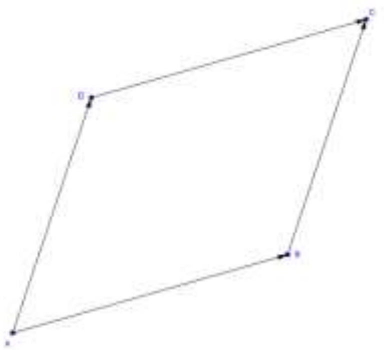
Skalare Grössen sind durch die Angabe einer Zahl (und einer Masseinheit) vollständig bestimmt.

Beispiele:
Temperatur (-5° C), Volumen (4.5 m^3), Masse (2 kg), Preis einer Ware (4.20 Fr.), Einwohnerzahl einer Stadt (10'543), Frequenz eines Radiosenders (in MHz). Diese Grössen lassen sich auf einer Skala, d.h. durch Punkte auf der Zahlengeraden darstellen.

Vektorielle Grössen sind durch die Angabe einer Zahl noch nicht vollständig bestimmt. Sie enthalten zusätzlich eine Richtungsinformation

Beispiele:
Verschiebung, Geschwindigkeit, Kraft, magnetische Feldstärke





$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

Eine Parallelverschiebung (Translation) kann durch einen Pfeil, einen sogenannten **Vektor** (eine gerichtete Strecke, geordnetes Punktepaar) in der Ebene oder im Raum dargestellt werden. Da zwei gleichgerichtete Pfeile mit gleicher Länge dieselbe Translation beschreiben, werden die zugehörigen Vektoren als gleich betrachtet. Da es nicht darauf ankommt, von welchem Punkt aus man den Vektor abträgt, spricht man von „freien“ Vektoren.

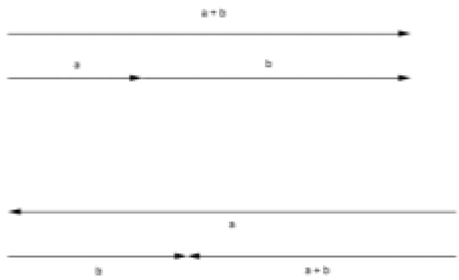
Bezeichnung: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$

Ein Vergleich:
Brüche, die durch Erweitern auseinander hervor gehen sind verschiedene Repräsentanten ein und desselben Bruchs.

Absoluter Betrag eines Vektors

Die Länge eines zum Vektor $\vec{a}$ gehörigen Verschiebungspfeils, heisst absoluter Betrag des zugehörigen Vektors $\vec{a}$ und wird mit $|\vec{a}|$ bezeichnet.

allg. gilt: $\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|$

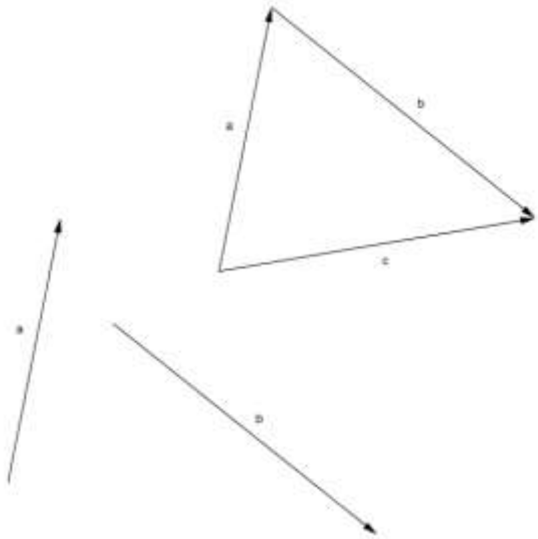


Aus der Gleichheit der Vektoren folgt die Gleichheit der Beträge.
Die Umkehrung gilt aber nicht:
Aus der Gleichheit der Beträge folgt i.a. nicht die Gleichheit der Vektoren. Bei einer Raute etwa sind die Beträge aller Seitenvektoren gleich, aber nicht alle Seitenvektoren selbst.

2. Addition von Vektoren

Verschiebungen (Translationen) kann man zusammensetzen. Zwei Vektoren werden addiert, indem man die zugehörigen Verschiebungen hintereinander ausführt

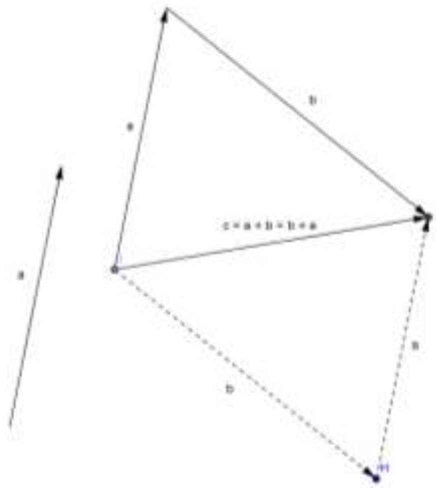
1. Methode
Der Vektor $\vec{b}$ wird zum Vektor $\vec{a}$ addiert, indem man $\vec{b}$ in den Endpunkt von $\vec{a}$ verschiebt. Der Summenvektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ verbindet den Anfangspunkt von $\vec{a}$ mit dem Endpunkt des verschobenen Vektors.



2. Methode:
Der Summenvektor ist der Diagonalenvektor des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms (Resultierende im Kräfteparallelogramm).

Die Addition ist kommutativ, d.h. es gilt:
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Es gilt die Dreiecksungleichung:
$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

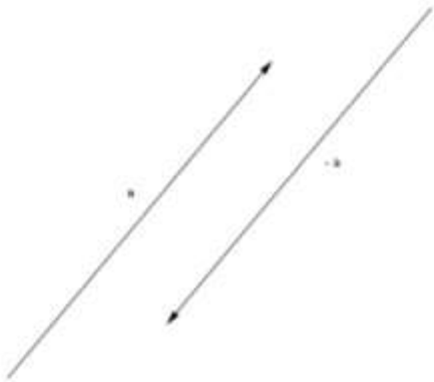


Spezialfälle:

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ gleichgerichtet

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ entgegengesetzt gerichtet.

Definition:
Unter dem Vektor $-\vec{a}$ versteht man den Vektor mit gleicher Länge aber entgegengesetzter Richtung wie $\vec{a}$.



Die Addition der Vektoren $\vec{a}$ und $-\vec{a}$ führt auf den sogenannten Nullvektor $\vec{0}$. Anfangs- und Endpunkt stimmen überein, sein absoluter Betrag ist 0, die Richtung ist unbestimmt.

Da für die so definierte Addition das assoziative Gesetz gilt, können auch mehrere Vektoren addiert werden:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$