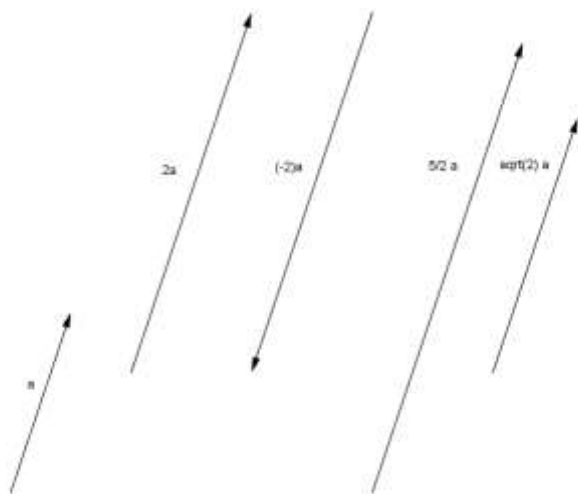


4. Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl



Definition:

Ist \vec{a} ein beliebiger Vektor und k eine reelle Zahl, dann verstehen wir unter $k \cdot \vec{a}$ den Vektor mit den folgenden Eigenschaften:

1. $k \cdot \vec{a}$ hat $|k|$ -fache Länge von \vec{a}
2. $k \cdot \vec{a}$ ist für $k > 0$ gleichgerichtet zu \vec{a} , für $k < 0$ zu \vec{a} entgegengesetzt gerichtet, für $k = 0$ gilt $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

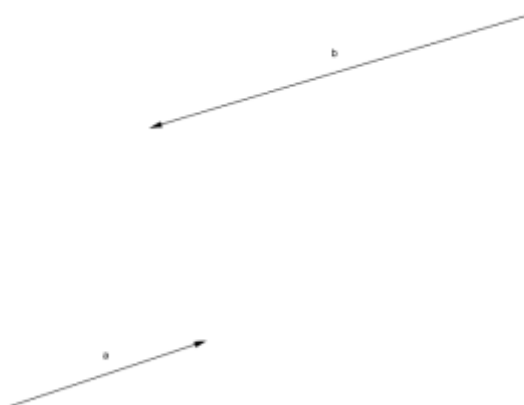
Mit anderen Worten:

Die Multiplikation mit k bedeutet eine zentrische Streckung des Vektors \vec{a} mit dem Masstab k vom Anfangspunkt aus.

Umgekehrt gilt:

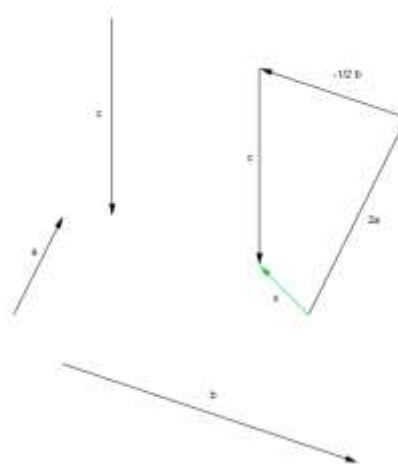
Sind zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} zueinander parallel (kollinear), dann ist \vec{b} ein Vielfaches von \vec{a} , d.h. es gilt $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$ mit $k \in \mathbb{R}$. Die beiden Vektoren heißen in diesem Fall **linear abhängig**.

In der Abbildung ist $\vec{b} = -\frac{7}{4} \cdot \vec{a}$



Aufgabe:

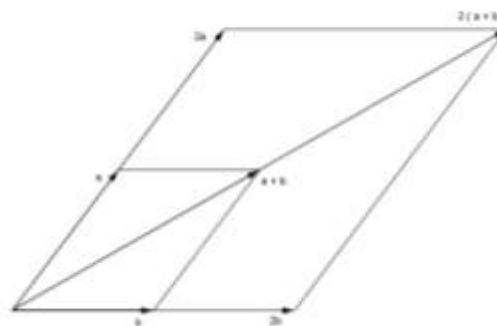
Es ist bei gegebenen Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} der Vektor $\vec{x} = 2\vec{a} - 0.5 \cdot \vec{b} + \vec{c}$ zu konstruieren



Für die Multiplikation mit einer reellen Zahl gelten die folgenden Gesetze.

1. $x \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = x\vec{a} + x\vec{b}$
2. $(x + y) \cdot \vec{a} = x\vec{a} + y\vec{a} \quad x, y \in \mathbb{R}$
3. $x \cdot (y\vec{a}) = (xy) \cdot \vec{a}$

Diese Gesetze sagen aus, dass man mit Vektoren wie in der Algebra rechnen kann.



Aufgabe:

Die folgende Vektorgleichung ist nach \vec{x} aufzulösen:

$$-2\vec{a} + 3\vec{x} = 4\vec{b} - 3\vec{c}$$

Lösung:

$$\vec{x} = \frac{2}{3} \cdot \vec{a} + \frac{4}{3} \cdot \vec{b} - \vec{c}$$

Aufgabe:

Gegeben ist in der Grundebene das von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannte Dreiecke ABC, Stelle die drei Seitenhalbierenden Vektoren \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} als Linearkombination der Vektoren \vec{a} und \vec{b} dar und bilde die Summe $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

Überprüfe das Ergebnis konstruktiv.

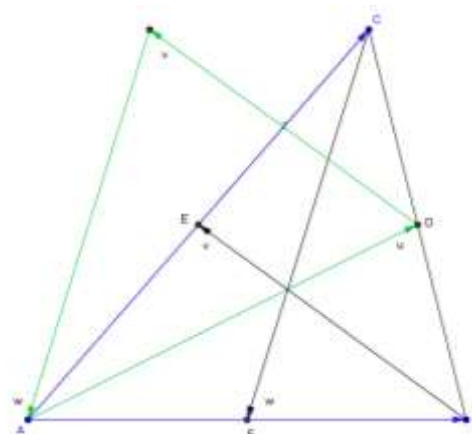
$$\vec{u} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\vec{v} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\vec{w} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$$

und damit $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$

Dies bedeutet, dass die drei Vektoren eine **geschlossenen Vektorkette** bilden.



Trägt man im Raum vom Punkt A aus drei Vektoren ab, die nicht zu einer Ebene parallel sind, so entsteht ein Körper, dessen Seitenflächen aus lauter Parallelogrammen besteht. Dieser Körper heisst Spat (Parallelelfach) als Analogon zum Parallelogramm in der Grundebene.

Aufgabe:

Das in der Skizze abgebildete Spat ABCDEFGH wird von den drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} aufgespannt. S ist der Schwerpunkt des Dreiecks BCE. Drücke die folgenden Vektoren in den gegebenen aus.

$$\vec{BG} = \vec{b} + \vec{c}$$

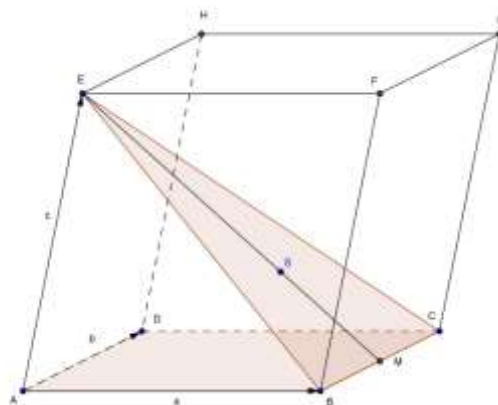
$$\vec{HF} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\vec{CE} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$

$$\vec{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{MS} = \frac{1}{3} \cdot \vec{ME} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{MB} + \vec{BA} + \vec{AE}) = -\frac{1}{6} \vec{b} - \frac{1}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{c}$$

$$\vec{AS} = \vec{AM} + \vec{MS} = \frac{2}{3} \cdot \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \vec{b} + \frac{1}{3} \cdot \vec{c}$$



Bemerkung:

Man sagt in diesem Fall, der Vektor \vec{AS} ist als Linearkombination der gegebenen Vektoren dargestellt.

Satz:

Die Seitenmitten EFGH eines räumlichen Vierecks liegen in einer Ebene und bilden ein Parallelogramm (Satz von Varignon?).

Beweis:

Es ist zu zeigen, dass $\vec{EF} = \vec{HG}$

Es sei $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{BC}$, $\vec{c} = \vec{CD}$, $\vec{d} = \vec{DA}$.

Mit diesen Bezeichnungen gilt: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$

Wegen

$$\vec{EF} = \vec{EB} + \vec{BF} = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \quad \text{und}$$

$$\vec{HG} = \vec{HD} + \vec{DG} = -\frac{1}{2} \vec{d} - \frac{1}{2} \vec{c} \quad \text{folgt}$$

$$\vec{EF} - \vec{HG} = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} - (-\frac{1}{2} \vec{c} - \frac{1}{2} \vec{d}) = \vec{0}$$

