

5. Komponentendarstellung von Vektoren

Grundebene \mathbb{R}^2

\mathbb{R}^2 :

Die Menge der reellen Zahlenpaare (x, y) wird mit \mathbb{R}^2 bezeichnet.

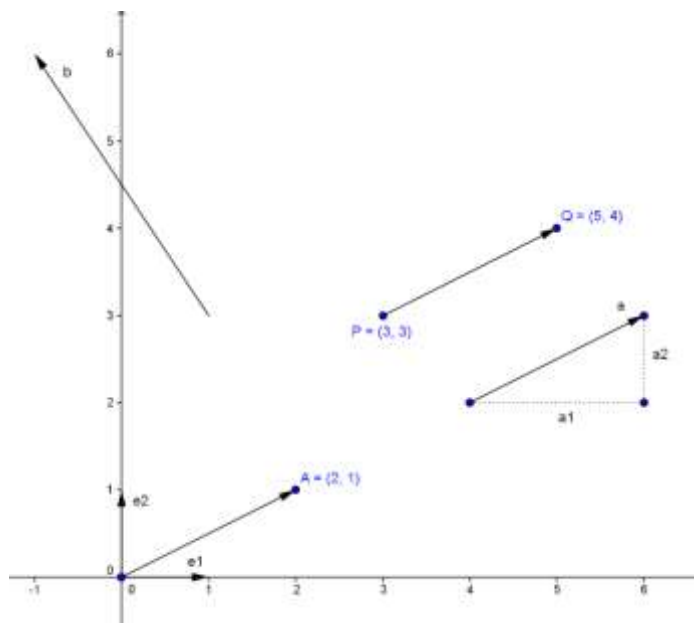
Wird etwa der Punkt $P(3, 3)$ nach $Q(5, 4)$ verschoben, so nimmt die x-Koordinate um 2, die y-Koordinate um 1 zu. Wir schreiben dafür

$$\text{kurz: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{analog } \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die folgenden Spezialfälle

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

heissen Basisvektoren.



Allgemein:

Jede Verschiebung \vec{a} in der Grundebene kann aus einer Verschiebung in x-Richtung und einer Verschiebung in y-Richtung zusammengesetzt werden. Verändert sich die x-Koordinate eines Punktes um a_1 , die y-Koordinate um a_2 zu, so schreiben wir kurz:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 \quad a_1 \text{ und } a_2 \text{ heissen die } \mathbf{Komponenten} \text{ des}$$

Die Komponenten eines Vektors können also als Relativkoordinaten des Endpunkts bezüglich seines Anfangspunkts aufgefasst werden, d.h. sie geben an, wie sich x- bzw. y-Koordinate verändern, wenn man vom Anfangs- zum Endpunkt übergeht.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ bedeutet also zum Beispiel: Addiert man zur x-Koordinate des Anfangspunkts 3 und zur y-Koordinate -2, so erhält man die Koordinaten des Endpunkts.

Zwei Vektoren sind genau dann gleich, wenn ihre Komponenten übereinstimmen.

Trägt man \vec{a} speziell im Nullpunkt $O(0,0)$ ab mit Endpunkt A, dann heisst \vec{a} **Ortsvektor des Punktes A** und es gilt:

Die Komponenten eines Ortsvektors stimmen mit den Koordinaten seines Endpunkts überein.

Folgende Sprechweisen sind gebräuchlich und gleichbedeutend:

- Der Punkt A mit den Koordinaten $A(x_A, y_A)$ und
- Der Punkt A mit dem Ortsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$

Absoluter Betrag eines Vektors

Nach Pythagoras gilt: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ absoluter Betrag (Norm) eines Vektors

$$\text{B: } |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \quad |\vec{b}| = \sqrt{13}$$

Kennt man von einem Vektor den absoluten Betrag und den Winkel bezüglich der positiven x-Achse, dann gilt für seine Komponenten $\vec{a} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \cos \alpha \\ |\vec{a}| \sin \alpha \end{pmatrix}$

Beispiel:

$$|\vec{a}| = 6.83 \quad \alpha = 146.5^\circ \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -5.70 \\ 3.77 \end{pmatrix}$$

Raum \mathbf{R}^3

Die Menge der reellen Zahlentripel (x, y, z) wird mit \mathbf{R}^3 bezeichnet

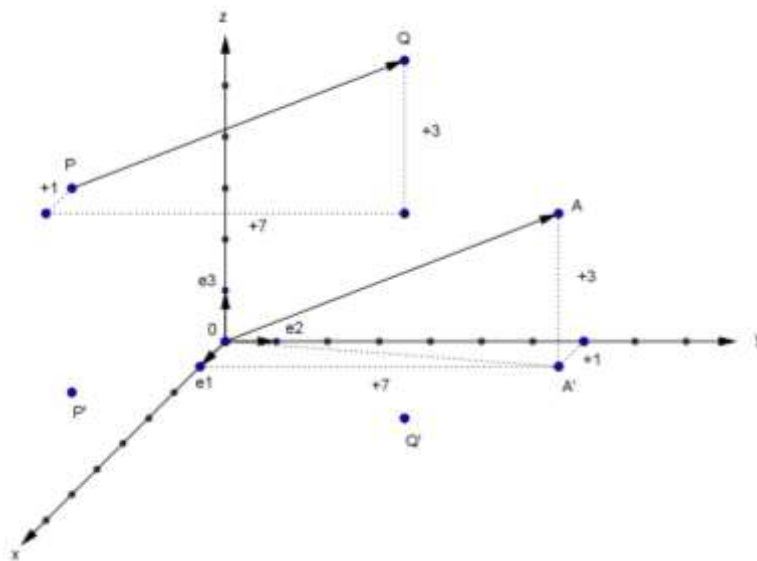
In der Abbildung ist in einem Schrägriss ein räumliches Koordinatensystem dargestellt. Die drei paarweise senkrecht aufeinander stehenden Achsen bilden ein Rechtssystem.

Bezeichnungen:

xy-Ebene: Grundrissebene

yz-Ebene: Aufrissebene

xz-Ebene: Seitenrissebene



In dieses Koordinatensystem sind zusätzlich die Punkte $P(2, -2, 4)$ $Q(3, 5, 7)$ eingetragen. Wird der $P(2, -2, 4)$ nach $Q(3, 5, 7)$ verschoben, so nimmt

die x-Koordinate um 1, die y-Koordinate um 7 und die z-Koordinate um 3 zu. Wir schreiben dafür kurz

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die folgenden Spezialfälle

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ heissen Basisvektoren } \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

heissen Basisvektoren.

Allgemein gilt:

Jede Verschiebung des Raumes kann aus Verschiebungen in x-, y- und z-Richtung zusammengesetzt werden. Nimmt dabei die x-Koordinate eines Punktes um a_1 , die y-Koordinate um a_2 und die z-Koordinate um a_3 zu, so schreiben wir kurz:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3, \quad a_1, a_2, a_3 \text{ heissen die Komponenten des Vektors}$$

Zwei Vektoren sind genau dann gleich, wenn ihre Komponenten übereinstimmen.

Trägt man den Vektor \vec{a} speziell im Nullpunkt $O(0,0,0)$ ab mit Endpunkt A, dann heisst \vec{a} **Ortsvektor des Punktes A** und es gilt:

Die Komponenten eines Ortsvektors stimmen mit den Koordinaten seines Endpunkts überein.

Folgende Sprechweisen sind gebräuchlich und gleichbedeutend:

- Der Punkt A mit den Koordinaten $A(x_A, y_A, z_A)$ und

- Der Punkt A mit dem Ortsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$

Absoluter Betrag (Norm des Vektors)

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{OA}|^2 = |\vec{OA}'|^2 + |\vec{AA}'|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \quad \text{Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck OA'A}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 a_i^2} \quad \text{Regel: Komponenten quadrieren, addieren, Wurzel ziehen}$$

$$\text{Beispiel: } |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 7^2 + 3^2} = \sqrt{59}$$

6. Das Rechnen mit Komponenten

Einführende Aufgabe (Grundebene):

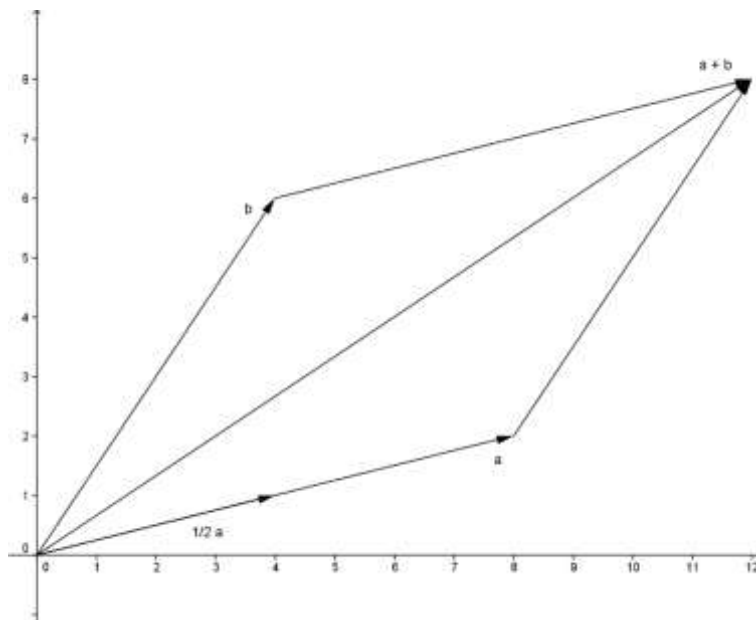
Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Es sind geometrisch die Komponenten der Vektoren $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ und $\frac{1}{2} \vec{a}$ zu ermitteln.

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 8+4 \\ 2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 8-4 \\ 2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 8 \\ \frac{1}{2} \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Allgemein gilt in der Grundebene und im Raum:

Vektoren werden addiert, subtrahiert, mit einer reellen Zahl multipliziert, indem man die entsprechenden Operationen komponentenweise durchführt.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix} \quad k\vec{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$$