

7. Grundaufgaben

Verbindungsvektor zweier Vektoren

Bei der Herleitung ist die Dimension (2 oder 3) unerheblich. Die Ergebnisse werden in der Grundebene illustriert.

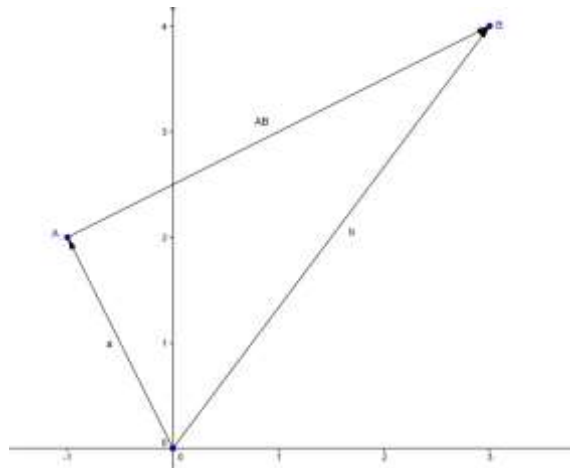
Bemerkung zur Bezeichnung:

Der Ortsvektor \vec{OA} des Punktes A wird zunächst mit \vec{a} bezeichnet, in den späteren Kapiteln mit \vec{r}_A .

Abbildung: A(-1, 2), B(3, 4)

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} \quad (1)$$

**Verbindungsvektor zweier Punkte
mit den Ortsvektoren \vec{a} und \vec{b}**



Merkregel: "**Endpunkt - Anfangspunkt**"

Beispiel: $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe (Grundebene):

Von einem Parallelogramm ABCD kennt man die aufeinanderfolgenden Punkte A, B, C. Bestimme D.

Skizze: A(-2, 1), B(2, 2), C(1,4)

$$\vec{d} = \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = \vec{OA} + \vec{BC}$$

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$$

Herleitungsvariante:

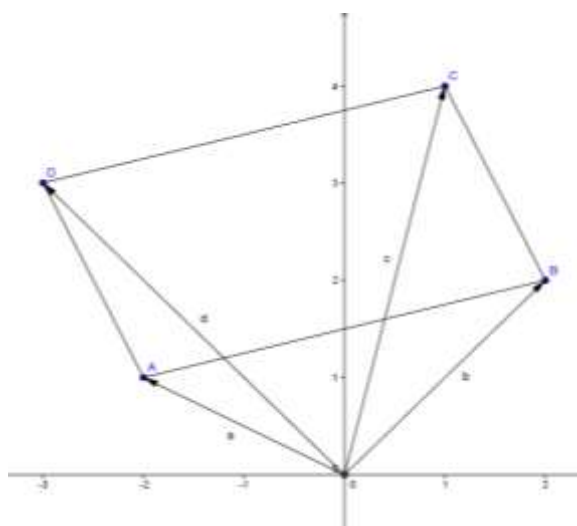
$$\vec{AB} = \vec{DC} \quad \text{also} \quad \vec{b} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{d} \quad \text{und}$$

daraus

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$$

Beispiel:

D(-3, 3)

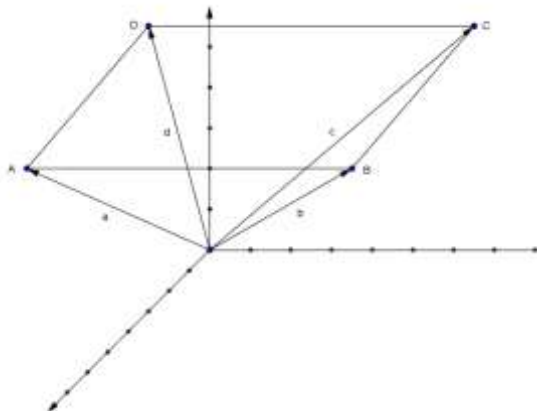


Aufgabe (Raum):

Von einem Parallelogramm ABCD kennt man die aufeinanderfolgenden Punkte A,B,C.
Bestimme D.

$$A(5, -2, 5), B(7, 2, 9), C(3, 8, 7)$$

Lösung: $D(1, 4, 3)$



Aufgabe.

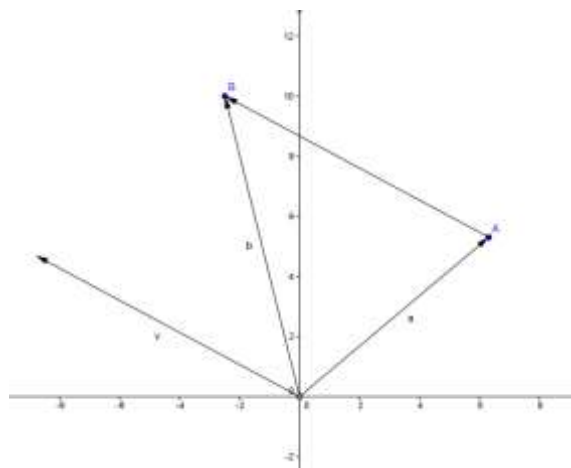
Von einem Vektor \vec{v} kennt man den absoluten Betrag $|\vec{v}| = 9.98$ und den Richtungswinkel $\varphi = 151.9^\circ$. \vec{v} wird im Punkt $A(6.31, 5.31)$ abgetragen. Wie heissen die Koordinaten des Endpunkts B?

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 9.98 \cdot \cos(151.9^\circ) \\ 9.98 \cdot \sin(151.9^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8.80 \\ 4.70 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\vec{b} = \vec{v} + \vec{a} = \begin{pmatrix} -8.80 + 6.31 \\ 4.70 + 5.31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.49 \\ 10.01 \end{pmatrix}$$

$B(-2.49, 10.01)$



Mittelpunkt einer Strecke

Beispiel:

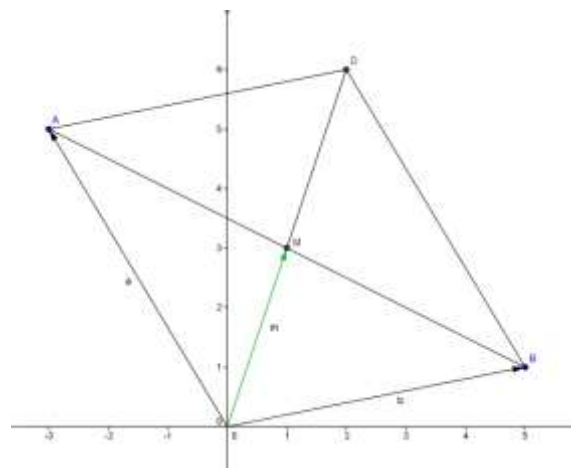
Gegeben ist die Strecke $A(-3, 5)$, $B(5, 1)$

Für den Ortsvektor des Mittelpunkts M der Strecke AB gilt:

$$\begin{aligned}\vec{m} &= \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \vec{a} + \frac{1}{2} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b})\end{aligned}$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \quad (2)$$

Mittelpunkt der Strecke AB



Die Koordinaten des Mittelpunkts sind also gleich dem **arithmetischen Mittel der Endpunktkoordinaten**.

\vec{m} kann als **halber Diagonalenvektor** im Parallelogramm, das von den Ortsvektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannt wird, aufgefasst werden.

Im Beispiel hat der Mittelpunkt die Koordinaten $M(1, 3)$

Bemerkung:

\vec{m} wird hin und wieder mit \overrightarrow{AM} verwechselt!

Aufgabe (Raum):

Es ist der Punkt $P(5, 2, 1)$ am Punkt $S(4, 4, 4)$ zu spiegeln.

Für den Ortsvektor zum Spiegelpunkt Q gilt:

$$\text{wegen } \vec{s} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{p} + \vec{q}) \quad \vec{q} = 2\vec{s} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Übungsaufgabe:

Von einem Parallelogramm $ABCD$ sind die Punkte $A(9, 2, 0)$, $B(3, 10, 4)$ und der Diagonalschnittpunkt $E(4, 7, 8)$ gegeben. Welche Koordinaten hat der Punkt C .

Lösung:

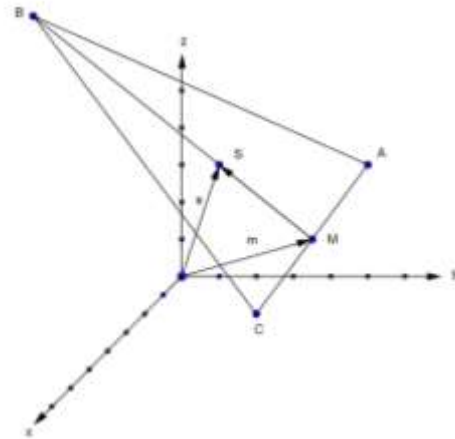
$$\vec{c} = 2 \cdot \vec{e} - \vec{a} \quad C(-1, 12, 16)$$

Schwerpunkt eines Dreiecks

$$\begin{aligned}\vec{s} &= \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{m} + \frac{1}{3} \cdot (\vec{c} - \vec{m}) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \vec{m} + \frac{1}{3} \cdot \vec{c} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b})\right) + \frac{1}{3} \cdot \vec{c} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\end{aligned}$$

$$\vec{s} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \quad (3)$$

Die Koordinaten des **Schwerpunkts eines Dreiecks** sind gleich dem arithmetischen Mittel der Eckpunktskoordinaten.



Beispiel:

Dreieck A(5, 3, 5) B(-4, 7, 7), C(2, -1, -6)

Schwerpunkt S(1, 3, 6)

Übungsaufgabe:

Es ist der folgende Satz in einem Spezialfall A(1, -2, 3)B(5, 2, -5)C(9, 6, -7) oder allgemein zu beweisen:

Satz:

In jedem Dreieck teilt der Schwerpunkt S die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1.

Teilpunkt einer Strecke

Das Vorgehen wird am folgenden Beispiel illustriert:

Aufgabe:

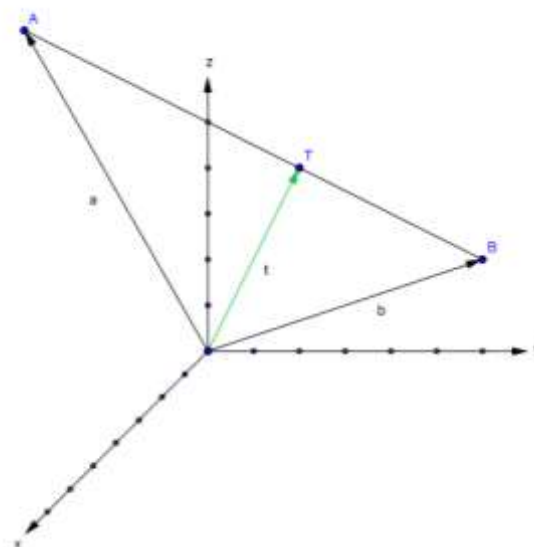
Gegeben die Punkte A(-1, 0, 5) und B(4, 10, 15). Die Strecke AB ist innen im Verhältnis $n:m = 3:2$ zu teilen.

$$\begin{aligned}\vec{t} &= \vec{OA} + \vec{AT} = \vec{a} + \frac{3}{5} \cdot \vec{AB} \\ &= \vec{a} + \frac{3}{5} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{2}{5} \vec{a} + \frac{3}{5} \vec{b} = \frac{1}{5} \cdot (2\vec{a} + 3\vec{b})\end{aligned}$$

Im Beispiel hat T die Koordinaten T(2, 6, 11)

Allgemeines Resultat:

$$\vec{t} = \frac{m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b}}{m + n}$$



Schwerpunkt zweier Massenpunkte

In den Punkten A befinde sich die Masse m_1 , im Punkt B die Masse m_2 . Es sind die Koordinaten des Schwerpunkts S gesucht.

Aus der Physik ist bekannt, dass S die Strecke AB im umgekehrten Verhältnis der beiden Massen teilt, d.h. es gilt:

$$m_1 \cdot \overline{AS} = m_2 \cdot \overline{BS} \quad \text{oder} \quad \frac{\overline{BS}}{\overline{AS}} = \frac{m_1}{m_2}$$

Daraus folgt:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{AS} + \overline{BS}}{\overline{AS}} = 1 + \frac{\overline{BS}}{\overline{AS}} = 1 + \frac{m_1}{m_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_2}$$

$$\text{oder} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AS}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{und damit}$$

$$\vec{s} = \vec{a} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{m_1 \cdot \vec{a} + m_2 \cdot \vec{b}}{m_1 + m_2}$$

