

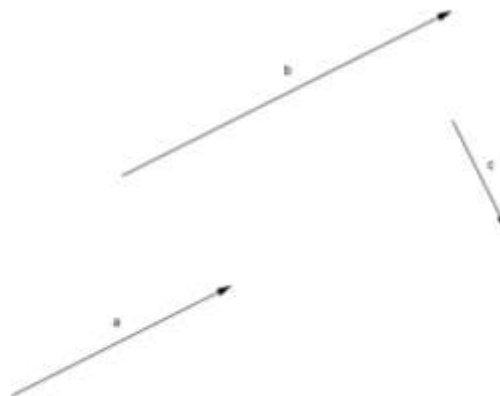
## 6. Lineare Abhängigkeit von Vektoren

Der Begriff der linearen Abhängigkeit spielt in der Vektorrechnung (oder der Linearen Algebra) eine wichtige Rolle. Zur Vorbereitung betrachten wir in der Grundebene oder im Raum zwei Vektoren, die zu einer Geraden parallel sind. Zwei Vektoren heissen in diesem Fall **kollinear**. Anders ausgedrückt ist  $\vec{b}$  ein geeignetes Vielfaches von  $\vec{a}$  d.h. es gilt:

$$\vec{b} = \lambda \vec{a} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Abbildung:  $\vec{b} = \frac{3}{2} \vec{a}$  oder  $3\vec{a} - 2\vec{b} = \vec{0}$  (\*)

Man sagt: die beiden Vektoren sind **linear abhängig**.



Im Gegensatz dazu ist der Vektor  $\vec{c}$  zum Vektor  $\vec{a}$  nicht kollinear, eine (\*) entsprechende Gleichung kann nur in der folgenden trivialen Form aufgestellt werden:

$$0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{0}.$$

Die beiden Vektoren sind in diesem Fall **linear unabhängig**.

Definition:

Zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  heissen genau dann **linear abhängig**, wenn gilt:

$$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \vec{0}, \text{ wobei}$$

$\lambda$  bzw.  $\mu$  nicht beide 0 sein dürfen, was sich in der Form  $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$  ausdrücken lässt.

Andernfalls heissen die Vektoren linear unabhängig.

Aufgabe (Grundebene):

Gesucht ist die fehlende Koordinate  $x$  des Punktes  $C(x, 9)$  so, dass  $C$  auf der Geraden  $g$  durch die Punkte  $A(5, -6)$  und  $B(-7, -3)$  liegt.

Liegt  $C$  auf  $g$ , dann haben die Vektoren  $\overrightarrow{AC}$  und  $\overrightarrow{AB}$  die gleiche Richtung, das heisst die beiden Vektoren sind linear abhängig,  $\overrightarrow{AC}$  ist ein Vielfaches von  $\overrightarrow{AB}$ .

$$(*) \overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x-5 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \text{in Komponenten:} \quad \begin{array}{l} x-5 = -12\lambda \\ 15 = 3\lambda \end{array}$$

$\lambda = 5$  eingesetzt in die 2. Gleichung ergibt  $x = -55$ .

Übungsaufgabe (Raum):

Es ist zu zeigen, dass das Viereck  $A(2, 3, 4)$ ,  $B(8, 6, 1)$ ,  $C(9, 3, 1)$   $D(5, 1, 3)$  ein Trapez ist.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DC} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$$

damit ist die Seite  $DC$  parallel zur Seite  $AB$ .

## Darstellung eines Vektors $\vec{c}$ als Linearkombination zweier gegebener Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

Aufgabe (Grundebene  $\mathbf{R}^2$ ):

Gesucht ist die Darstellung des Vektors  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  als Linearkombination der linear unabhängigen Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Physikalische Interpretation der Aufgabe:

Zerlege die Kraft  $\vec{c}$  in zwei Komponenten mit vorgegebenen Richtungen.

Rechnerische Lösung

Gesucht sind zwei reelle Zahlen  $\lambda$  und  $\mu$  so, dass gilt:

$$\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \quad (*)$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$4\lambda + 2\mu = 2$$

$$-2\lambda + 2\mu = 5$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} \quad \mu = 2$$

Bemerkung zu (\*):

anders ausgedrückt: die drei Vektoren sind linear abhängig.

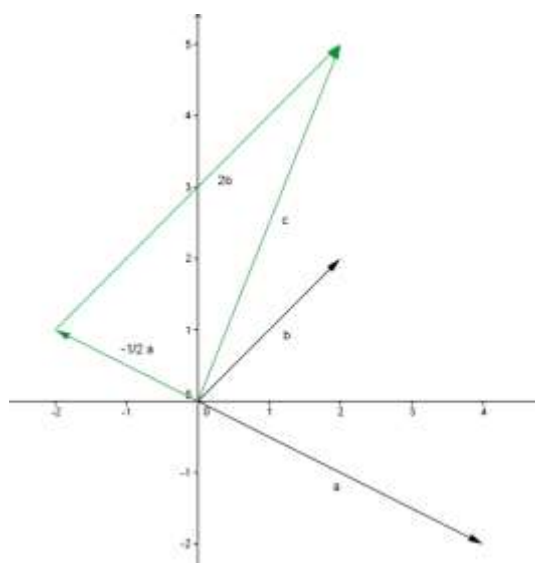
Allgemein gilt:

Satz:

Sind in der Grundebene zwei linear unabhängige Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  gegeben, dann kann jeder weitere Vektor  $\vec{c}$  eindeutig als Linearkombination der Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  dargestellt werden:

$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \vec{0}$ . Die beiden gegebenen Vektoren heißen **Basisvektoren**.

Konstruktive Lösung



Übungsaufgabe:

Es ist der Vektor  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$  nach den linear unabhängigen Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$  zu zerlegen.

Lösung:  $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$

Drei Vektoren des Raumes, die zu einer Ebene parallel sind heissen **komplanar**.

Beispiel:

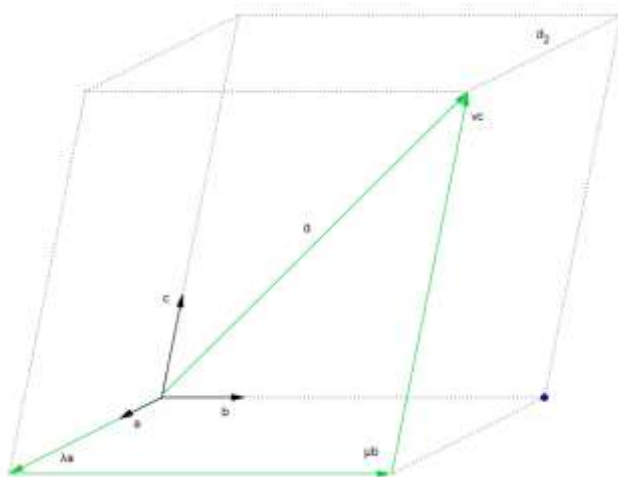
Die Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$   $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  sind komplanar, denn es gilt:  $\vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$ .

Der Vektor  $\vec{c}$  ist also eine **Linearkombination der Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$** . Die drei Vektoren heissen in diesem Fall **linear abhängig**.

Definition:

Drei Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  heissen genau dann **linear abhängig**, wenn gilt:

$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{0}$ , wobei  $\lambda$ ,  $\mu$  bzw.  $\nu$  nicht beide 0 sein dürfen, was sich in der Form  $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \neq 0$  ausdrücken lässt. Andernfalls heissen die Vektoren **linear unabhängig**



Sind im **Raum  $\mathbf{R}^3$**  drei linear unabhängige Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  gegeben (also drei nicht komplanare Vektoren), dann kann jeder Vektor  $\vec{d}$  des Raumes in drei Komponenten mit vorgegebenen Richtungen zerlegt werden d.h. jeder Vektor des Raumes kann als Linearkombination der drei gegebenen Vektoren in der folgenden Form dargestellt werden:

$$\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$$

Die drei gegebenen Vektoren werden als **Basisvektoren** bezeichnet,

In der Linearen Algebra spielt der Begriff der linearen Unabhängigkeit eine wichtige Rolle. Als Beispiel sei erwähnt:

Ein lineares Gleichungssystem kann auch als Vektorgleichung dargestellt werden (siehe etwa das folgende Beispiel). So kann etwa die Lösbarkeit oder die Anzahl der Lösungen ermittelt werden Näheres dazu im abschnitt → weitere Themen → Lineare Algebra

Aufgabe:

Es ist der Vektor  $\vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -11 \end{pmatrix}$  nach den gegebenen Vektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}$  zu zerlegen.

Der Ansatz  $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$  führt auf das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{cases} 3\lambda - 5\mu + 4\nu = 5 \\ 7\lambda + 2\mu - 3\nu = 2 \\ 4\lambda + 3\mu - 7\nu = -11 \end{cases}$$

Die Lösung des Systems, z.B. mit der Additionsmethode liefert die gesuchte Zerlegung:

$$\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$$

Übungsaufgabe:

Es ist der Vektor  $\vec{d} = \begin{pmatrix} -8 \\ -13 \\ 12 \end{pmatrix}$  nach den Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

zu zerlegen.