9. Metrische Probleme

Vektoren mit vorgegebener Länge

Aufgabe (Raum):

Welche Komponenten hat der Vektor $\vec{x}$, der zum Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ entgegengesetzt gerichtet ist und die Länge 35 hat.

Wegen $|\vec{a}| = 7$ ist $\vec{e} = \frac{1}{7}\vec{a}$ ein Einheitsvektor. Die Komponenten des gesuchten Vektors ergeben sich, indem man den Einheitsvektor mit dem Faktor k = -35 streckt.

$$\vec{x} = -35 \cdot \tfrac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 15 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Allgemein ist

$$\vec{e} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

ein **Einheitsvektor mit gleicher Richtung wie** $\vec{a}$ **.**

Abstand zweier Punkte

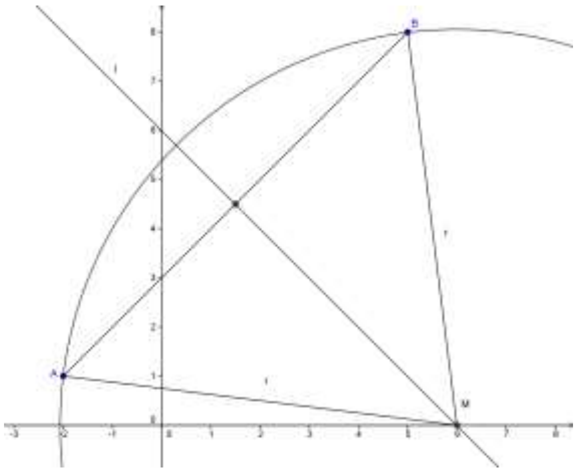
Der Abstand d zweier Punkte A und B ist gleich dem absoluten Betrag ihres Verbindungsvektors: $d = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\vec{b} - \vec{a}\right\|$.

Beispiel A(-1, 2), B(2, 3) Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ d = $\sqrt{10}$

Bemerkung:
Es ist zweckmässig zunächst das Quadrat des Abstands zu berechnen.

Aufgabe:
Gesucht sind der Mittelpunkt M und der Radius r eines Kreises, der durch
A(-2, 1) und B(5, 8) geht
a) und dessen Mittelpunkt auf der x-Achse liegt
b) und der die x-Achse berührt.

a)
Ansatz für den gesuchten Mittelpunkt M(x,0).
Ortsbedingung:
$r = \left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right| \Leftrightarrow r^2 = \left|\overrightarrow{MA}\right|^2 = \left|\overrightarrow{MB}\right|^2$
Statt der Abstände vergleicht man häufig die Quadrate der Abstände.
$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} -x-2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 5-x \\ 8 \end{pmatrix}$
$(x + 2)^2 + 1 = (x - 5)^2 + 64$ x = 6
Mittelpunkt M(6,0) Radius $r = \left|\overrightarrow{MA}\right| = \sqrt{65}$



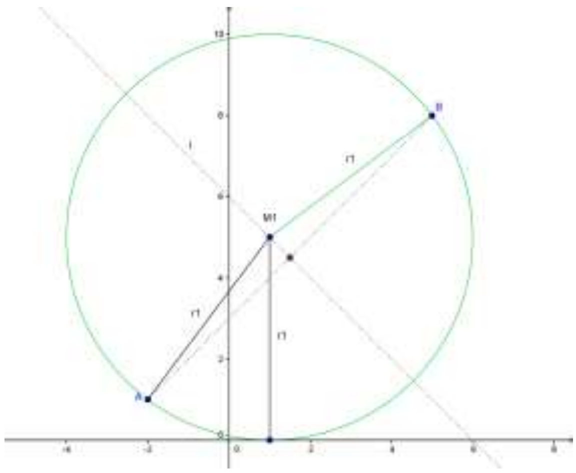
2. Lösungsweg:
Der gesuchte Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten *l* der Strecke AB mit der x-Achse.
Steigung m_1 der Strecke AB: $m_1 = 1$
Steigung der Mittelsenkrechten ist $m_2 = -1$ (wegen $m_1 \cdot m_2 = -1$)
Mittelpunkt der Strecke AB $M(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$ Gleichung der Mittelsenkrechten *l*: y = 6 – x
Schnittpunkt mit der x-Achse: M(6/0)

b)
Der Punkt M auf der Mittelsenkrechten von A und B ist so zu bestimmen, dass M von A und von der x-Achse den gleichen Abstand hat.

Ansatz für den gesuchten Mittelpunkt
M(x, 6 - x).

$r^2 = (6 - x)^2 = (x + 2)^2 + (5 - x)^2$
$x^2 + 6x - 7 = (x - 1)\cdot(x + 7) = 0$
Koordinaten der gesuchten
Mittelpunkte $M_1(1,5)$, $M_2(-7,13)$

Bemerkung:
Die Aufgabe wurde im Kapitel
Ähnlichkeit durch zentrische Streckung
gelöst.



Aufgabe:
Welche Punkte der y-Achse sind vom Punkt A(-6, 0) doppelt so weit entfernt wie vom Punkt B(3, 3)?

Ansatz für den gesuchten Punkt P(0,y)
Ortsbedingung:
$\left|\overrightarrow{PA}\right| = 2\cdot\left|\overrightarrow{PB}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{PA}\right|^2 = 4\cdot\left|\overrightarrow{PB}\right|^2$

$36 + y^2 = 4(9 + y^2 - 6y + 9)$ $\quad$ $y^2 - 8y + 12 = (y - 6)\cdot(y - 2) = 0$ $\quad$ $y_1 = 6 \quad y_2 = 2$

Koordinaten der gesuchten Punkt $P_1(0,6)$, $P_2(0,2)$

Konstruktive Lösung:
Apolloniuskreis mit der y-Achse schneiden.

Beispiele aus der **Raumgeometrie:**

A(-1, 3, -1) B(1, 0, 5) Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ d = 7

Aufgabe:
Welcher Punkt der z-Achse hat von A(2, 3, 3) und B(1, 2, 5) gleiche Entfernung ?

Ansatz für den gesuchten Punkt P(0, 0, z)

$\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3-z \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5-z \end{pmatrix}$ $\left|\overrightarrow{PA}\right| = \left|\overrightarrow{PB}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{PA}\right|^2 = \left|\overrightarrow{PB}\right|^2$

$4 + 9 + (3 - z)^2 = 1 + 4 + (5 - z)^2$ $z = 2$
Der Punkt P(0, 0, 2) hat die verlangte Eigenschaft.

Aufgabe:
In welchen Punkten schneidet die Kugel mit dem Mittelpunkt M(-6, 3, 7) und dem Radius r = 7 die z-Achse.

$|PA|^2 = 36 + 9 + (7 - z)^2 = 49$ $(7 - z)^2 = 4$ $7 - z = 2$ oder $7 - z = -2$
$z_1 = 5$, $z_2 = 9$
Schnittpunkte $S_1(0, 0, 5)$, $S_2(0, 0, 9)$

Aufgabe(aufwändig)
Vom Quadrat ABCD kennt man die Ecken B(5, 0, 10) und D(2, 21, 10) auf einer Diagonalen. Ausserdem liegt die Ecke A in der xy-Ebene. Gesucht sind die Ecken A und C.

Die Quadratdiagonale BD hat wegen $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Länge $\left|\overrightarrow{PA}\right| = \sqrt{450} = 15 \cdot \sqrt{2}$,

die Quadratseite also die Länge 15.

Die in der xy-Ebene liegende Ecke A(x, y, 0) hat von den benachbarten Ecken B und D gleichen Abstand:

$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} x-5 \\ y \\ 10 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y-21 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\left|\overrightarrow{BA}\right| = \left|\overrightarrow{DA}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{BA}\right|^2 = \left|\overrightarrow{DA}\right|^2$:

$(x-5)^2 + y^2 + 10^2 = (x-2)^2 + (y-21)^2 + 10^2$

oder vereinfacht:

$x = 7 \cdot (y-10)$ (1)

Der Punkt A hat von B den Abstand 15, womit für das Abstandsquadrat gilt:

$(x-5)^2 + y^2 + 10^2 = 225$ (2)

(1) eingesetzt in (2) führt auf die quadratische Gleichung:

$y^2 - 21y - 110 = (y-11) \cdot (y-10) = 0$

mit den Lösungen $y_1 = 10$ und $y_2 = 11$.

Der Diagonalenschnittpunkt M hat wegen $\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{b} + \vec{d})$ die Koordinaten $M(\frac{7}{2}, \frac{21}{2}, 10)$.

Da M auch Mitte von AC ist, gilt:

$\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{c})$ und damit $\vec{c} = 2\vec{m} - \vec{a})$

1. Lösung: A(0, 10, 0) und C(7, 10, 20) 2. Lösung: A(7, 11, 0) und C(0, 10, 20)

Übungsaufgaben

a)

Welche Punkte der x-Achse sind von A(0, -2, 4) doppelt so weit entfernt wie von B(6, 2, -1)?

Lösung:

$P_1(4, 0, 0)$, $P_2(12, 0, 0)$

b)

Gegeben sind die Punkte A(-1, 9, 4), B(11, 3, 8), C(t, 0, t). Bestimme t so, dass das Dreieck ABC mit der Basis AB gleichschenklig ist.

Lösung:

Die Bedingung $\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{BC}\right|^2$ ergibt die Lösung t = 3.