8. Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

Welche Eigenschaften sind für die Ähnlichkeit von Dreiecken hinreichend? Für den Nachweis der Ähnlichkeit zweier Dreiecke müsste man nach Definition eigentlich eine Ähnlichkeitsabbildung finden, die das eine Dreieck in das andere überführt. Die folgenden Ähnlichkeitssätze vereinfachen diese Aufgabe. Entsprechend den vier Kongruenzsätzen gelten nämlich die folgenden

Ähnlichkeitssätze für Dreiecke.

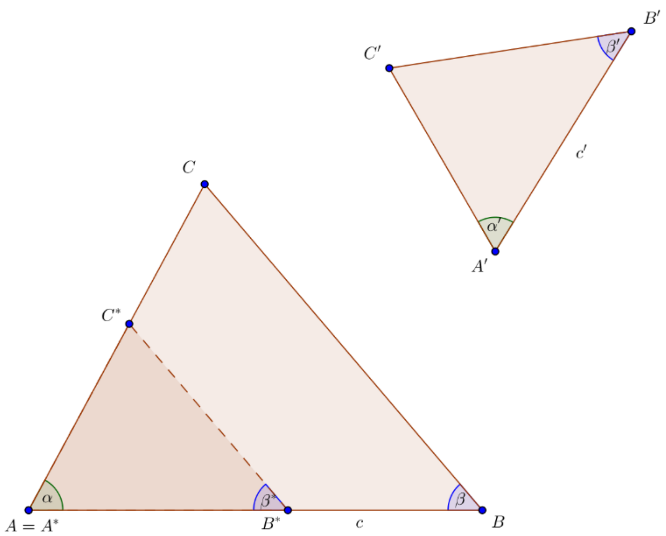
Dreiecke sind schon ähnlich
1. wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.
2. wenn die Verhältnisse entsprechender Seiten übereinstimmen.
3. wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und dem Zwischenwinkel übereinstimmen.
4. wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der grösseren der beiden Seiten übereinstimmen.

Bemerkung:
Im Unterscheid zu den Kongruenzsätzen wird - statt der Gleichheit der Seiten - nur die Gleichheit entsprechender Seitenverhältnisse verlangt.

Beweisidee:
Strecke eines der beiden Dreiecke so, dass das Bilddreieck nach dem entsprechenden Kongruenzsatz zum andern Dreieck kongruent ist. Damit ist gezeigt, dass das eine Dreieck durch Hintereinander Ausführen einer zentrischen Streckung und einer Kongruenzabbildung abgebildet werden kann.

z.B. Beweis von 1.

Die Dreiecke A´B´C und ABC stimmen in den Winkeln α und β überein. Wir zeigen, dass das Dreieck ABC durch Hintereinander-ausführen einer zentrischen Streckung und einer Kongruenzabbildung in das Dreieck A’B’C‘ übergeführt werden kann. Dazu strecken wir Wird das Dreieck ABC mit Zentrum A und dem Massstab $k = \frac{c'}{c}$. Gestreckt, so stimmt das gestreckte Dreieck A*B*C* stimmt mit dem Dreieck A´B´C´ in einer Seite und zwei Winkeln überein. Die beiden Dreiecke A´B´C´ und ABC sind damit nach Definition zueinander ähnlich.



Bemerkung:
Bei Dreiecken folgt wegen 1.:
Die Gleichheit zweier Winkel ist bereits hinreichend für die Gleichheit entsprechender Seitenverhältnisse.

Gegenbeispiel:
Obwohl die Winkel übereinstimmen, sind zwei Rechtecke i.a. nicht zueinander ähnlich.

Aufgaben:

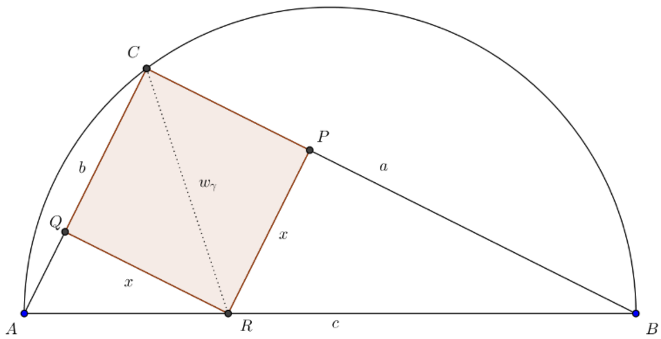
1.
Einem rechtwinkligen Dreieck wird auf zwei Arten ein Quadrat einbeschrieben. Welches Quadrat hat den grösseren Flächeninhalt?

1. Möglichkeit:
Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke PRB und CAB folgt:

$$\frac{a-x}{x}=\frac{a}{b}$$

und daraus

$$x=\frac{ab}{a+b}$$

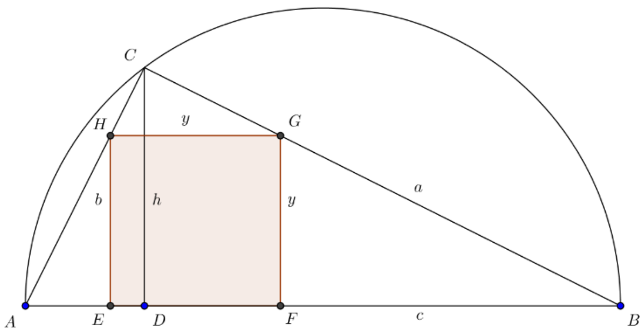


2. Möglichkeit
Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CHG und CAB folgt:

$$\frac{h-y}{y}=\frac{h}{c}$$

und daraus wegen
$ab=ch$ (Dreiecksfläche)

$$y=\frac{hc}{c+h}=\frac{ab}{c+h}\ (*)$$



Die beiden Nenner können folgendermassen abgeschätzt werden:

$$(c+h)^2-(a+b)^2=c^2+2ch+h^2-(a^2+2ab+b^2)$$

Wegen c·h = a·b (Flächeninhalt) und $c^2 = a^2 + b^2$ (Pythagoras) vereinfacht sich der Term zu

$$(c+h)^2-(a+b)^2=h^2>0$$

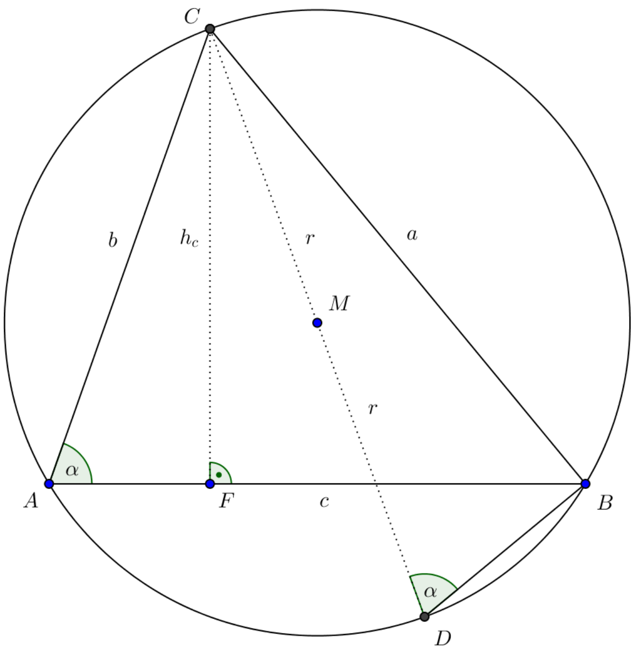
Im 2. Fall ist damit der Nenner grösser ist als im 1. womit also gilt x > y

Zahlenbeispiel:
Das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten 3 und 4 und der Hypotenuse 5.
Wegen der Flächenformel $hc=ab$ erhält man für die Höhe $h=\frac{ab}{c}=\frac{12}{5}$
und damit für $x=\frac{12}{7}=\frac{60}{35}$ und für $y=\frac{60}{37}<\frac{60}{35}=x$

2. Es ist der folgende Satz zu beweisen:
Für den Flächeninhalt I eines Dreiecks mit den Seitenlängen a, b und c und dem Umkreisradius r gilt:

$$I = \frac{abc}{4r}$$

Beweis:



Die mit α bezeichneten Peripheriewinkel über der gleichen Sehne BC sind gleich. Ausserdem hat das Dreieck BCD bei B einen rechten Winkel (Satz des Thales). Damit sind die Dreiecke CAF und BCD ähnlich.
Für die Streckenverhältnisse gilt dann:

$$\frac{h_c}{b} = \frac{a}{2r}$$

oder also

$$h_c = \frac{ab}{2r}$$

Für den Flächeninhalt I gilt somit:

$$I = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = \frac{abc}{4r}$$

Übungsaufgabe:

Der Höhenschnittpunkt in einem Dreieck unterteilt jede Höhe in zwei Abschnitte.
Es ist der folgende Satz zu beweisen:
In einem Dreieck ist das Produkt der Höhenabschnitte für die drei Höhen gleich gross.