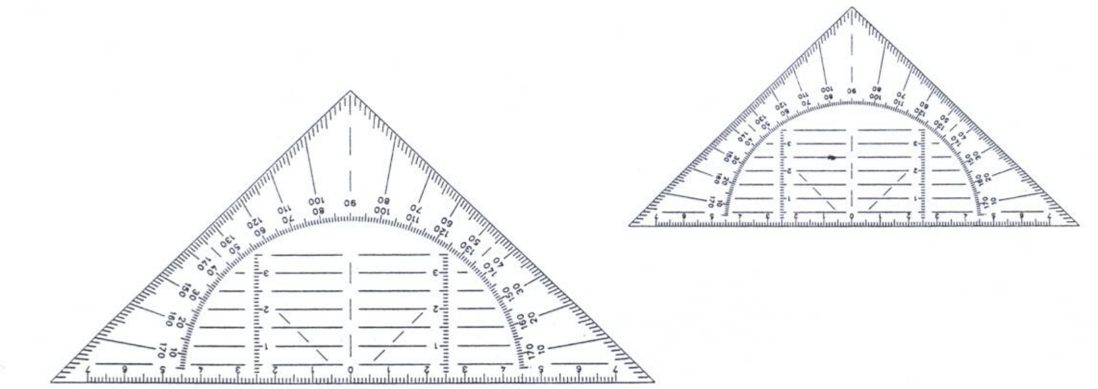
5. Abbildung durch zentrische Streckung

Beispiel:
Die abgebildeten Geo-Dreiecke und das Wandtafelmodell habe dieselbe Form.

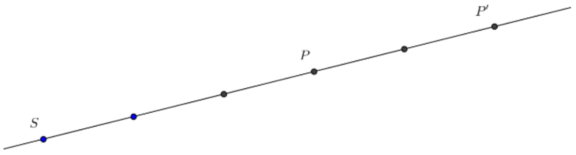


a)
Worin stimmen die Dreiecke überein?
b)
Angenommen die Kathete des Wandtafeldreiecks ist fünfmal so lang wie bei einem Schüler-Geo-Dreieck. Wie verhalten sich dann die Längen der Hypotenusen?
c)
Wie viele Schüler-Geo-Dreiecke werden benötigt, wenn man damit ein Wandtafeldreieck zusammensetzen soll?

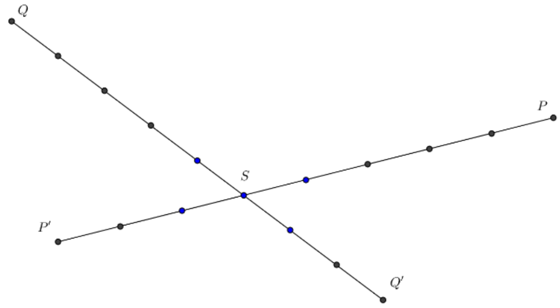
Frage:
Wie können Figuren verkleinert oder vergrössert werden, ohne dass sich ihre Form ändert?

Antwort:
Die zu Grunde liegende Abbildung heisst zentrische Streckung.

Definition:
Unter einer **zentrischen Streckung** mit dem Zentrum S und dem Massstab $k \neq 0$ verstehen wir eine Abbildung der Ebene auf sich mit den folgenden Eigenschaften:
1. Der Bildpunkt P' von P liegt auf der Geraden SP.
2. Das Verhältnis von Bildstrecke zu Originalstrecke ist gleich $|k|$ d.h. $\frac{\overline{SP'}}{\overline{SP}} = |k|$
3. Für $k > 0$ sind SP' und SP gleichgerichtet, für $k < 0$ entgegengesetzt gerichtet.



$k = \frac{5}{3}$

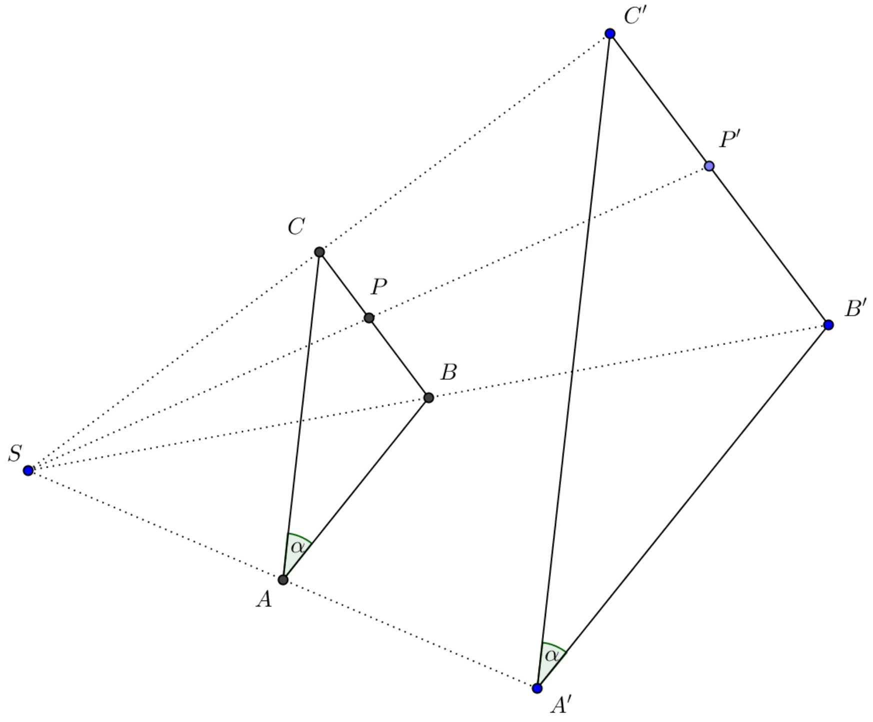


$k = -\frac{3}{5}$

Formulierungsvariante zur Definition:
Bei einer zentrischen Streckung liegen eine Punkt P und sein Bild P´ mit dem Zentrum S auf einer Geraden und es gilt: Der Bildvektor ist ein Vielfaches des Originalvektors: $\overrightarrow{SP'} = k \cdot \overrightarrow{SP}$

Bemerkung:
$|k| > 1$ bedeutet eine Vergrösserung,
$|k| < 1$ bedeutet eine Verkleinerung der Originalstrecke.
$k = -1$ bedeutet eine Punktspiegelung an S.

Aufgabe:
Ein gegebenes Dreieck ist vom Zentrum S aus mit dem Massstab $k = 2$ zu strecken.

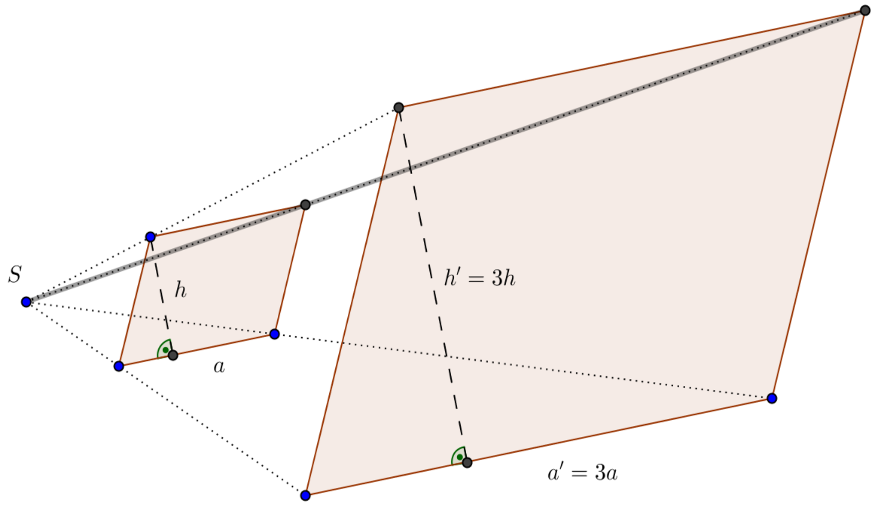


Aufgrund der Konstruktion vermuten wir die folgenden Eigenschaften:
E1:
Das Bild einer Geraden ist eine dazu parallele Gerade, Geraden durch S sind Fixgeraden (d.h. die Abbildung ist geradentreu)
E2:
Das Bild einer Strecke hat $|k|$-fache Länge.
E3:
Die zentrische Streckung ist winkeltreu
E4:
Die zentrische Streckung ist teilverhältnistreu (insbesondere gilt: Mitte bleibt Mitte)
E5:
Das Bild eines Kreises ist ein Kreis.
E6:
Das Bild einer Figur hat k^2-fachen Inhalt.

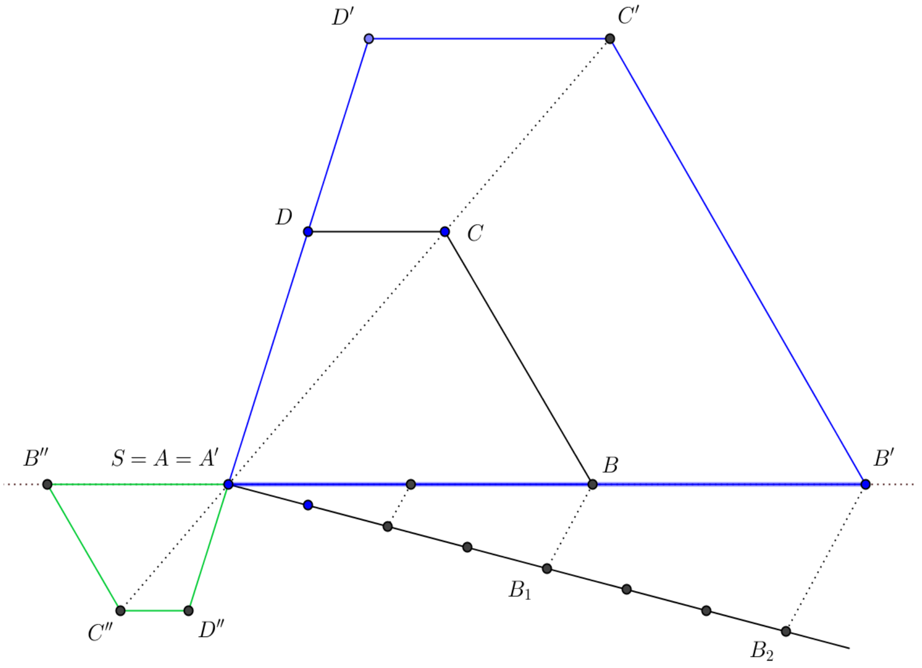
Beweisideen
Zu E2: 2. Strahlensatz
Zu E3: nach E1 wird jeder Schenkel in einen parallelen Schenkel abgebildet
Zu E4: Strahlensatz
Zu E5:
Sei M´ das Bild des Kreismittelpunkts M. Jeder Punkt der Kreislinie hat als Bild einen Punkt P´, der von M´ die Entfernung $|k| \cdot r$ hat.

Zu E6:
Nach E3 werden sowohl Grundlinie als auch Höhe eines Dreiecks mit dem Faktor $|k|$ gestreckt, also hat das Bilddreieck k^2-fachen Inhalt. Verallgemeinerung auf Vielecke, Kreise.

Beispiel:
Streckt man ein Parallelogramm mit dem Faktor $k = 3$, so hat die Bildfigur 9-fachen Inhalt



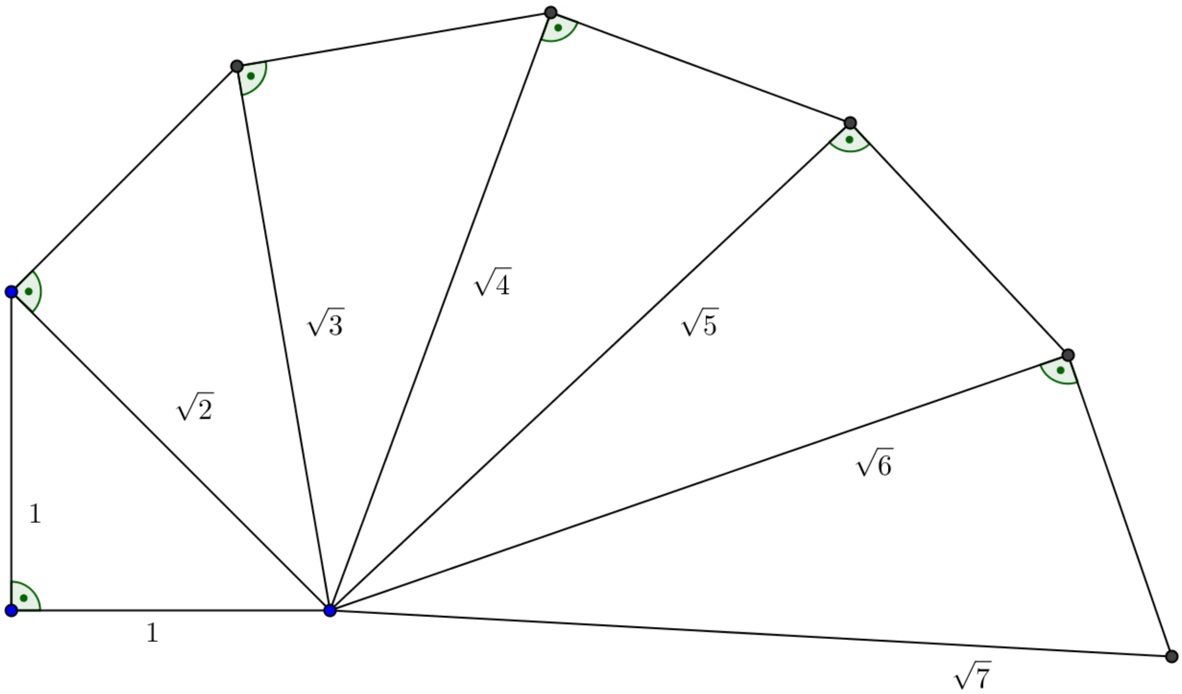
Aufgabe:
Strecke ein Trapez von einer Ecke aus mit dem Massstab a) $k = -\frac{1}{2}$ b) $k = \frac{7}{4}$.



Konstruktionsbeschreibung: Auf einer Hilfsgeraden werden von A aus 7 bzw. 4 Teile ab. Die Parallele zu BB_1 durch B_2 schneidet die Gerade SB im Bildpunkt B´.
Wegen der Parallelentreue sind B´C´ parallel zu BC bzw. C´D´ parallel zu CD.

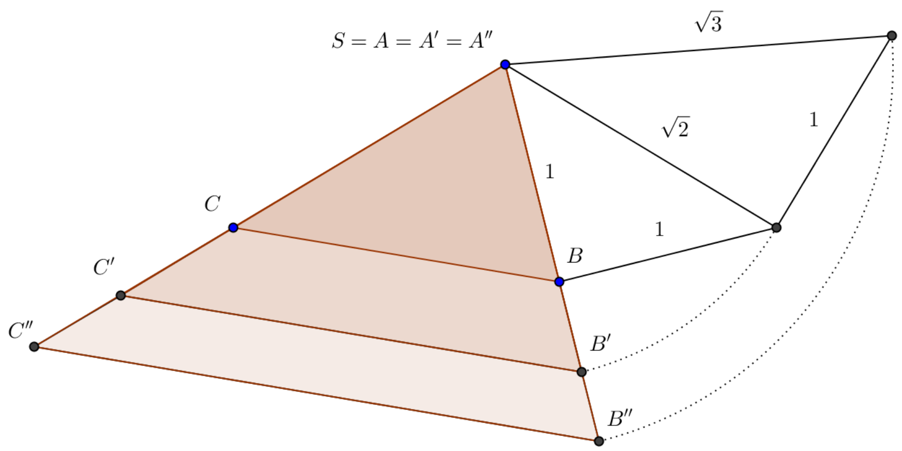
Aufgabe:
Bei gegebenem Zentrum S ist ein Dreieck so zu strecken, dass die Bildfigur
a) doppelten b) dreifachen c) n-fachen Inhalt hat.

Zur Vorbereitung: Konstruktion von $\sqrt{n}$ («der Schnägg»)



Die Endpunkte der Hypotenusen liegen angenähert auf einer archimedischen Spirale. Näheres dazu etwa bei http://kociemba.org/themen/spirale/spirale.htm

Konstruktionsbericht:
Aus dem Flächenverhältnis a) $k^2 = 2$ bzw. b) $k^2 = 3$ ergibt sich das Seitenverhältnis
a) $k = \pm\sqrt{2}$ bzw. b) $k = \pm\sqrt{3}$



Eine technische Anwendung der zentrischen Streckung:
Der Storchenschnabel oder Pantograph zur Vergrösserung oder Verkleinerung von Figuren (erfunden um 1600 vom Jesuiten Christoph Schreiner).

Heute werden Vergrösserungen auf fototechnischem Weg oder mit dem PC (CAD) hergestellt
https://de.wikipedia.org/wiki/Pantograf

Übungsaufgaben:
1.
Ein Dreieck ist durch eine Parallele zu einer Seite in zwei inhaltsgleiche Gebiete zu teilen.
2.
Die Luftlinie von Vitznau nach Weggis misst 4.5 km. Wie lang ist sie auf einer Karte im Massstab 1:25 000?
3.
Der Bodensee hat eine Fläche von 538.5 km^2. Welche Fläche hat er auf einer Karte mit Massstab 1:25 000? (Lösung: 86.16 dm^2)
4.
Wir bezeichnen die drei Seitenmitten eines Dreiecks ABC mit U, V, W. Welche zentrische Streckung bildet das Dreieck ABC in das Dreieck UVW ab?