

10. Ähnlichkeit am Kreis

Bekanntlich gilt der so genannte

Peripheriewinkelsatz:

Jeder Zentriwinkel (in der gleichen Halbebene) über einem Kreisbogen ist doppelt so gross wie der dazu gehörige Peripheriewinkel d.h. es gilt: $\alpha = 2\gamma$.

Beweis:

Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. Der Mittelpunkt M liegt auf einer Seite
In diesem Spezialfall handelt es sich um den Satz des Thales
2. M liegt im Dreieck ABC
3. M liegt ausserhalb des Dreiecks ABC

Beweis im Fall 2.

Da die beiden Dreiecke MBC und MAB gleichschenkelig sind, sind die Basiswinkel ε bzw. φ gleich gross. Die entsprechenden Mittelpunktswinkel sind dann $180^\circ - 2\varepsilon$ bzw. $180^\circ - 2\varphi$.

Addiert man zu diesen beiden Winkeln den Zentriwinkel α so erhält man:

$$(180^\circ - 2\varepsilon) + (180^\circ - 2\varphi) + \alpha = 360^\circ$$

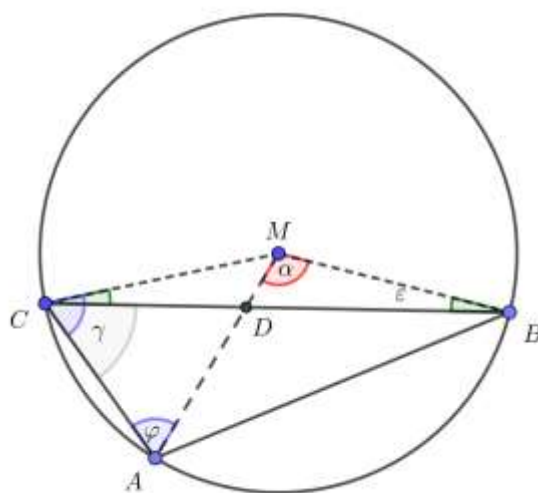
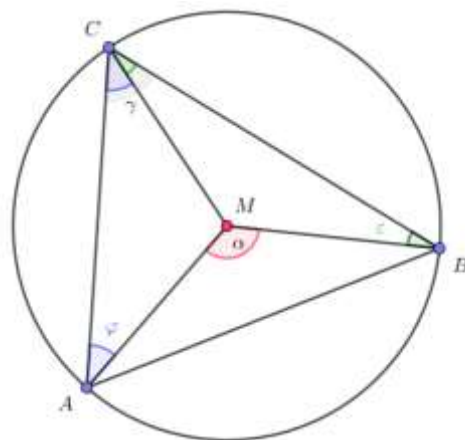
$$\text{Oder wegen } \varepsilon + \varphi = \gamma \text{ vereinfacht: } \alpha = 2(\varepsilon + \varphi) = 2\gamma.$$

Beweis im Fall 3

In den Dreiecken CAD und BMD sind die Winkel in D gleich gross. Deshalb muss gelten:

$$-\varepsilon + \varphi = \varepsilon + \alpha$$

$$\text{oder } \alpha = 2\varphi - 2\varepsilon = 2(\varphi - \varepsilon) = 2\gamma$$



Sehnensatz:

Zeichnet man durch einen Punkt innerhalb eines Kreises Sehnen, so sind die Rechtecke aus den Sehnen inhaltsgleich.

Beweis:

Die Dreiecke $\triangle APC$ und $\triangle DPB$ sind ähnlich

Begründung:

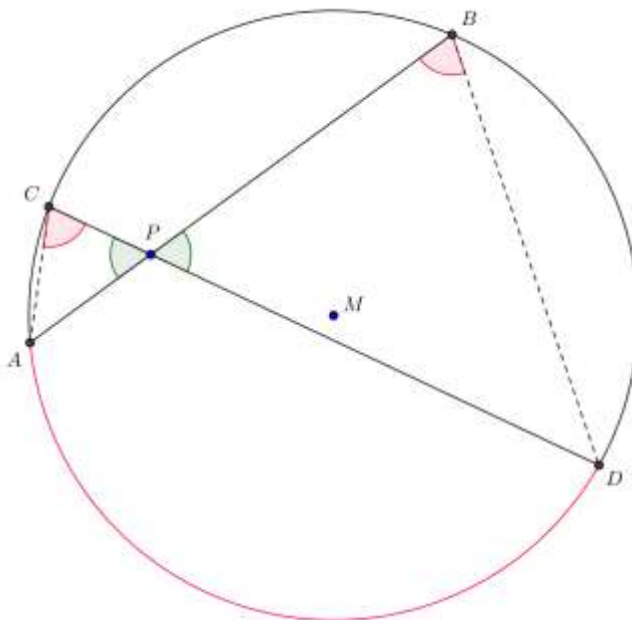
- Die Peripheriewinkel in B und C über dem Bogen AD sind gleich gross
- Die Scheitelwinkel in P sind gleich gross

Aus der Ähnlichkeit folgt die Gleichheit der Streckenverhältnisse:

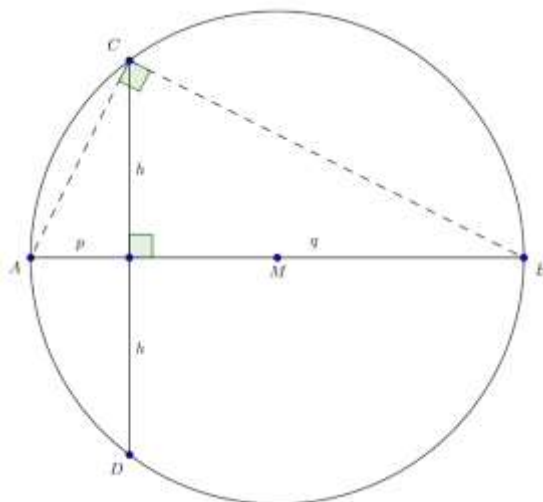
$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$$

oder

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$



Der **Höhensatz** kann als Spezialfall des Sehnensatzes aufgefasst werden.



Der Sehnensatz ermöglicht eine einfache Konstruktion der drei in Abschnitt 9. erwähnten **Mittelwerte**:

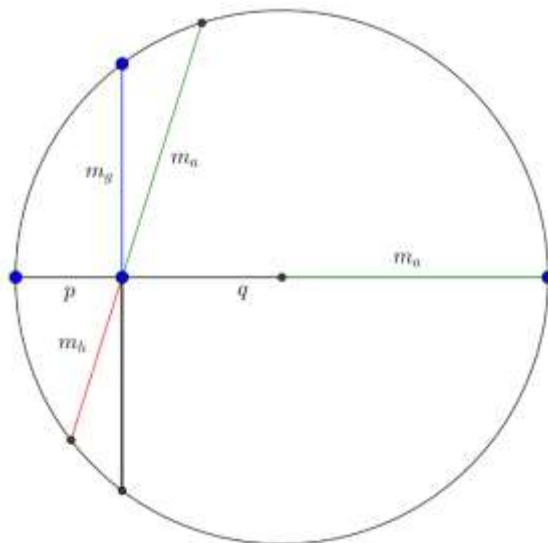
Begründung

Zwischen den drei Mittelwerten besteht die folgende Beziehung:

$$m_h = \frac{m_g^2}{m_a}$$

oder

$$m_g^2 = m_h \cdot m_a$$



Analog zum Sehnensatz gilt der so genannte

Sekantensatz:

Zeichnet man durch einen Punkt ausserhalb eines Kreises Sekanten, so sind die Rechtecke aus den Sekantenabschnitten inhaltsgleich.

Die Dreiecke APD und CPB sind ähnlich.

Begründung:

Die beiden Dreiecke stimmen im Winkel α überein.

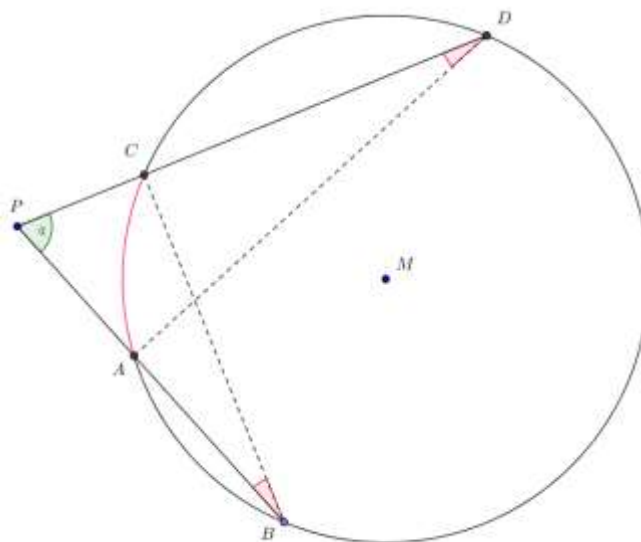
Die Peripheriewinkel in B und D über dem Bogen AC sind gleichgross.

Aus der Ähnlichkeit folgt die Gleichheit der Streckenverhältnisse

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$$

oder

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$



Tangentensatz:

Zeichnet man durch einen Punkt ausserhalb eines Kreises eine Tangente und eine Sekante, so ist das Quadrat über dem Tangentenabschnitt inhaltsgleich zum Rechteck aus den Sekantenabschnitten:

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC}^2$$

Begründung:

Die beiden Dreiecke stimmen im

Winkel α überein.

Die Sehnen-Tangentenwinkel

Peripheriewinkel in B und C

sind gleichgross.

Aus der Ähnlichkeit folgt die

Gleichheit der

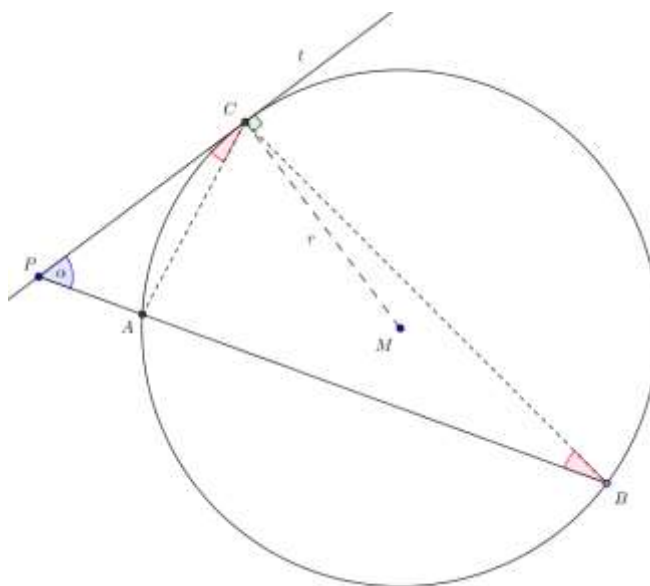
Streckenverhältnisse

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$$

$$\text{oder}$$

oder

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC}^2$$

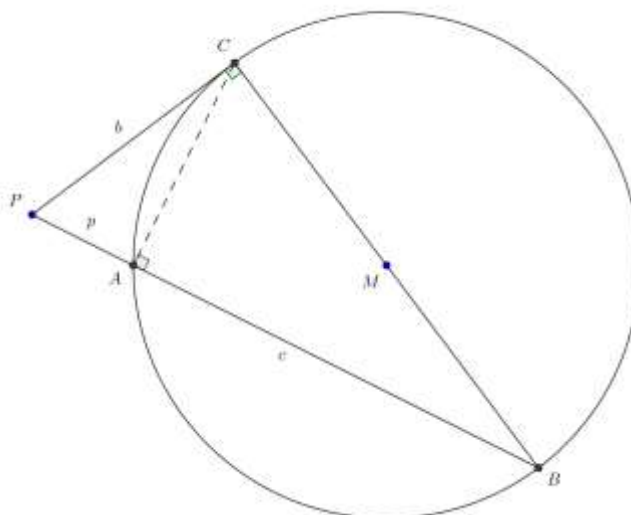


Der **Kathetensatz** kann als Spezialfall des Sekanten-Tangentensatzes aufgefasst werden

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC}^2$$

Oder

$$b^2 = p \cdot c$$



Zu den **Sehnen-Tangentenwinkeln**:

Addiert man in den Dreiecksecken alle Winkel so erhält man:

$$2\alpha' + 2\beta' + 2\gamma' + \alpha + \beta + \gamma = 540^\circ$$

also wegen der Winkelsumme im

Dreieck:

$$2\alpha' + 2\beta' + 2\gamma' = 360^\circ$$

oder

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 180^\circ$$

Andererseits gilt für die Winkelsumme

bei A:

$$\alpha + \beta' + \gamma' = 180^\circ$$

und daraus folgt

$$\alpha' = \alpha$$

und analog

$$\beta' = \beta \text{ und } \gamma' = \gamma$$

