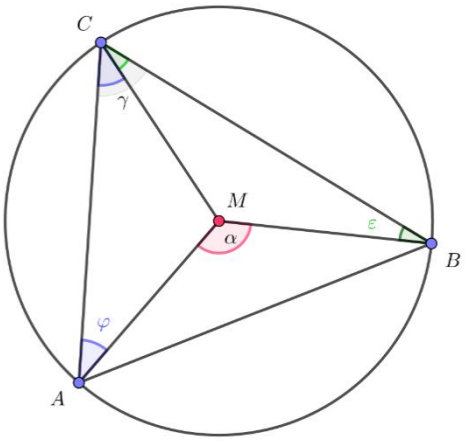
10. Ähnlichkeit am Kreis

Bekanntlich gilt der so genannte

Zentri-Peripheriewinkelsatz:
Jeder Zentriwinkel (in der gleichen Halbebene) über einem Kreisbogen ist doppelt so gross wie der dazugehörige Peripheriewinkel, d.h. es gilt: $\alpha = 2\gamma$.



Beweis:

Es sind drei Fälle zu unterscheiden:
1. Der Mittelpunkt M liegt auf einer Seite.
   In diesem Spezialfall handelt es sich um den Satz des Thales.
2. M liegt im Dreieck ABC.
3. M liegt ausserhalb des Dreiecks ABC.

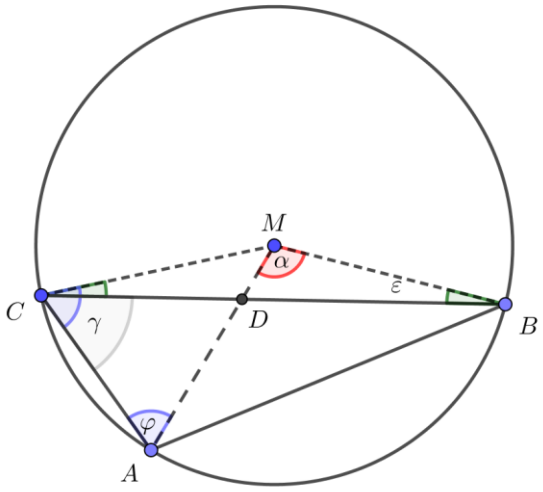
Beweis im Fall 2:

Da die beiden Dreiecke MBC und MAB gleichschenklig sind, sind die Basiswinkel ε bzw. φ gleich gross. Die entsprechenden Mittelpunktswinkel sind dann $180° - 2\varepsilon$ bzw. $180° - 2\varphi$. Addiert man zu diesen beiden Winkeln den Zentriwinkel α so erhält man:
$(180° - 2\varepsilon) + (180° - 2\varphi) + \alpha = 360°$
Oder wegen $\varepsilon + \varphi = \gamma$
vereinfacht:
$\alpha = 2(\varepsilon + \varphi) = 2\gamma$.

Beweis im Fall 3:

In den Dreiecken CAD und BMD sind die Winkel in D gleich gross. Deshalb muss wegen $\gamma = \varphi - \varepsilon$ gelten:

$\varphi - \varepsilon + \varphi = \varepsilon + \alpha$
oder
$\alpha = 2\varphi - 2\varepsilon = 2(\varphi - \varepsilon) = 2\gamma$

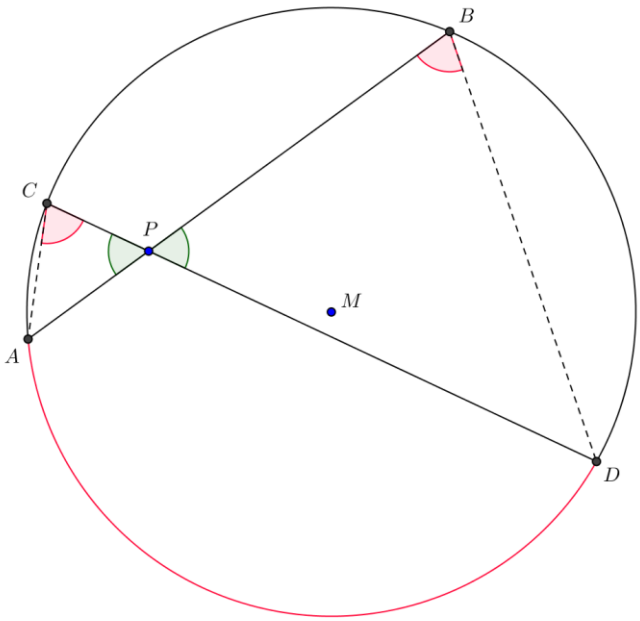


Sehnensatz:

Zeichnet man durch einen Punkt innerhalb eines Kreises Sehnen, so sind die Rechtecke aus den Sehnenabschnitten inhaltsgleich.

Beweis:
Die Dreiecke APC und DPB sind ähnlich.
Begründung:

- Die Peripheriewinkel in B und C über dem Bogen AD sind gleich gross.
- Die Scheitelwinkel in P sind gleich gross.



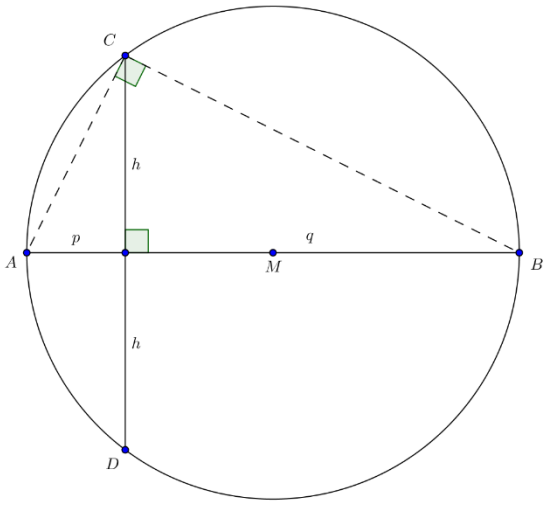
Aus der Ähnlichkeit folgt die Gleichheit der Streckenverhältnisse:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$$

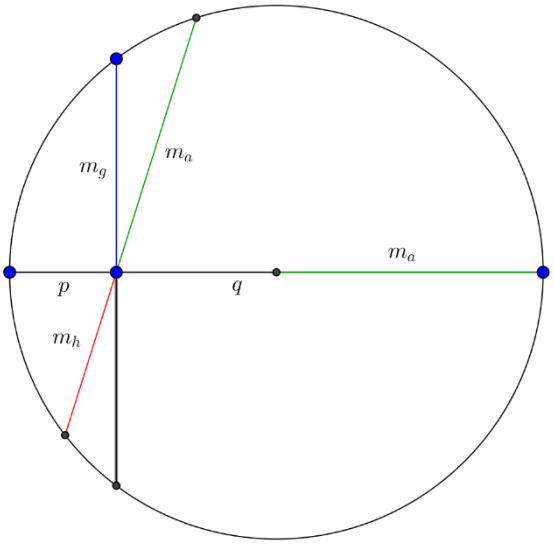
oder

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

Der **Höhensatz $h^2 = pq$** im rechtwinkligen Dreieck kann als Spezialfall des Sehnensatzes aufgefasst werden.



Der Sehnensatz ermöglicht eine einfache Konstruktion der drei in Abschnitt 9. erwähnten **Mittelwerte**:



Begründung
Zwischen den drei Mittelwerten besteht die folgende Beziehung:

$$m_h = \frac{m_g^2}{m_a}$$

oder

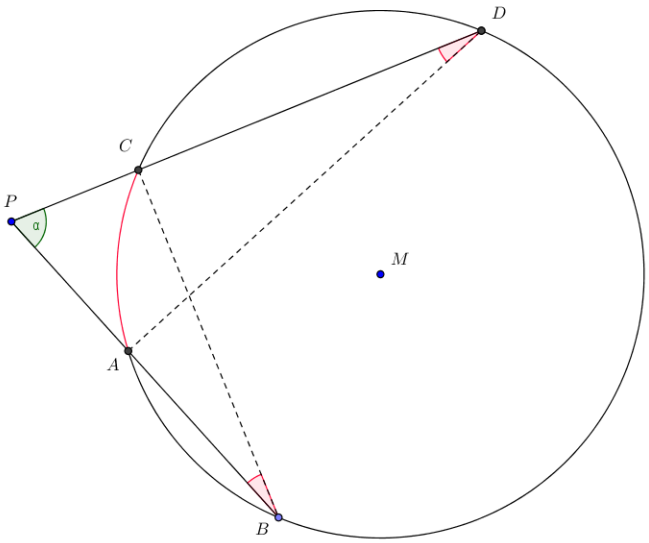
$$m_g^2 = m_h \cdot m_a$$

Analog zum Sehnensatz gilt der so genannte

Sekantensatz:

Zeichnet man durch einen Punkt P ausserhalb eines Kreises Sekanten, so sind die Rechtecke aus den vom Punkt P aus gemessenen Sekantenabschnitten inhaltsgleich.

Die Dreiecke APD und CPB sind ähnlich.



Begründung:
Die beiden Dreiecke stimmen im Winkel α überein.
Die Peripheriewinkel in B und D über dem Bogen AC sind gleichgross.

Aus der Ähnlichkeit folgt die Gleichheit der Streckenverhältnisse

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$$

oder

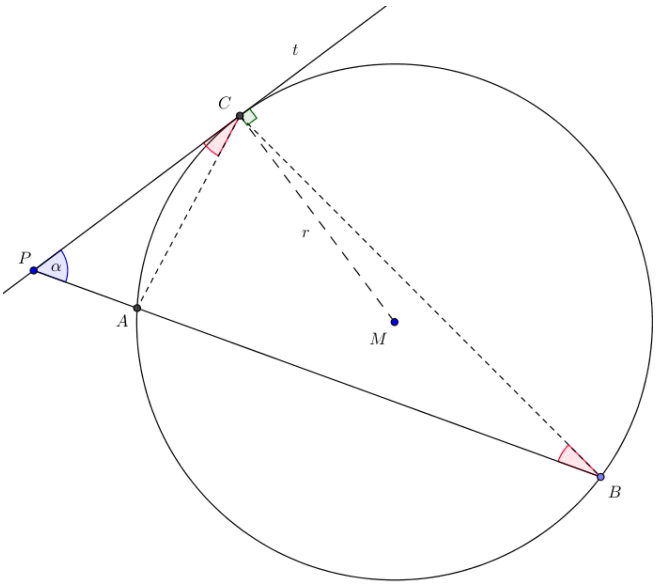
$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

Sekanten-Tangentensatz:

Zeichnet man durch einen Punkt P ausserhalb eines Kreises eine Tangente und eine Sekante, so ist das Quadrat über dem Tangentenabschnitt inhaltsgleich zum Rechteck aus den vom Punkt P aus gemessenen Sekantenabschnitten:

$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC}^2$

Begründung:
Die beiden Dreiecke PAC und PCB stimmen im Winkel α überein.
Die Sehnen-Tangentenwinkel in B und C sind gleich gross, vgl. Herleitung auf der folgenden Seite.

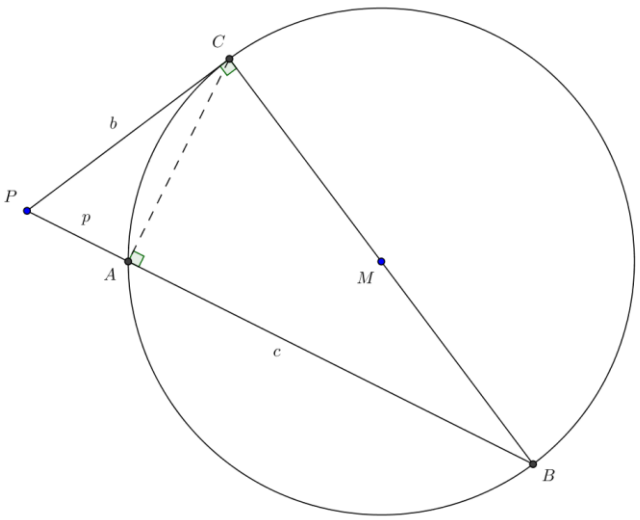


Aus der Ähnlichkeit folgt die Gleichheit der Streckenverhältnisse

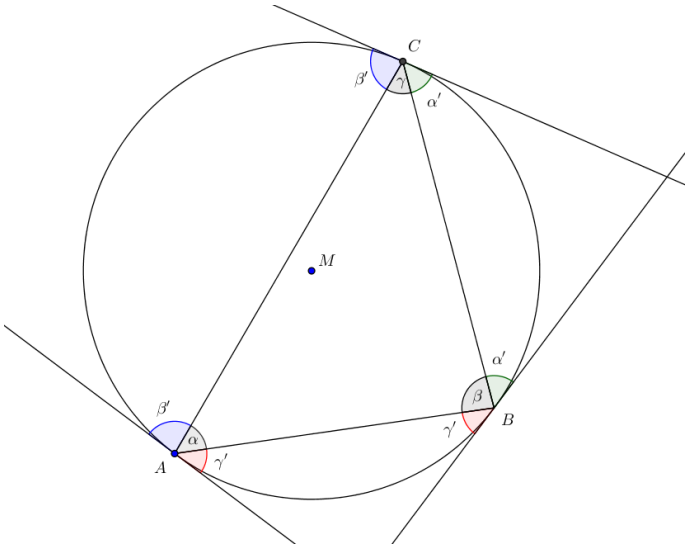
$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$
oder
$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC}^2$

Der **Kathetensatz** im rechtwinkligen Dreieck kann als Spezialfall des Sekanten-Tangentensatzes aufgefasst werden

$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC}^2$
oder
$b^2 = p \cdot c$



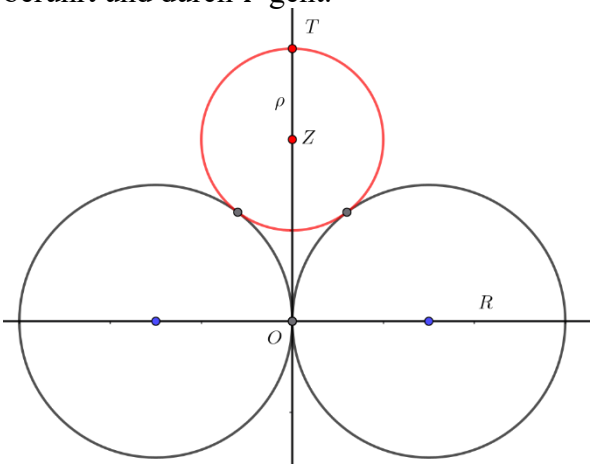
Zu den **Sehnen-Tangentenwinkeln**:



Addiert man in den Dreiecksecken alle Winkel so erhält man:
$2\alpha' + 2\beta' + 2\gamma' + \alpha + \beta + \gamma = 540°$
also wegen der Winkelsumme im Dreieck:
$2\alpha' + 2\beta' + 2\gamma' = 360°$
oder
$\alpha' + \beta' + \gamma' = 180°$
Andrerseits gilt für die Winkelsumme bei A:
$\alpha + \beta' + \gamma' = 180°$
und daraus folgt
$\alpha' = \alpha$
und analog
$\beta' = \beta$ und $\gamma' = \gamma$.

Aufgabe:

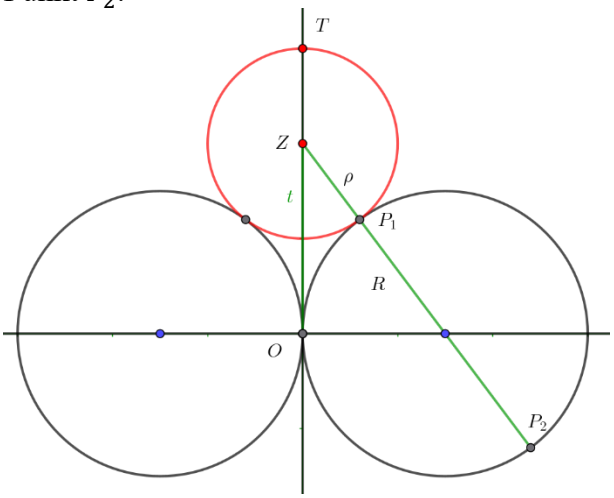
In der Abbildung sind zwei Kreise mit Radius R gegeben, die sich von aussen im Punkt O berühren. Auf der gemeinsamen Tangente in O ist ein Punkt T gegeben.
Gesucht ist ein Kreis mit Mittelpunkt Z auf der Tangente, der die beiden gegebenen Kreise berührt und durch T geht.



Bezeichnungen:
Radius der gesuchten Kreises: $\overline{ZT} = \rho$
Tangentenabschnitt $\overline{OT} = t$
damit gilt: $\overline{OZ} = t - \rho$

In der Abbildung ist $t = 2R$ gewählt.

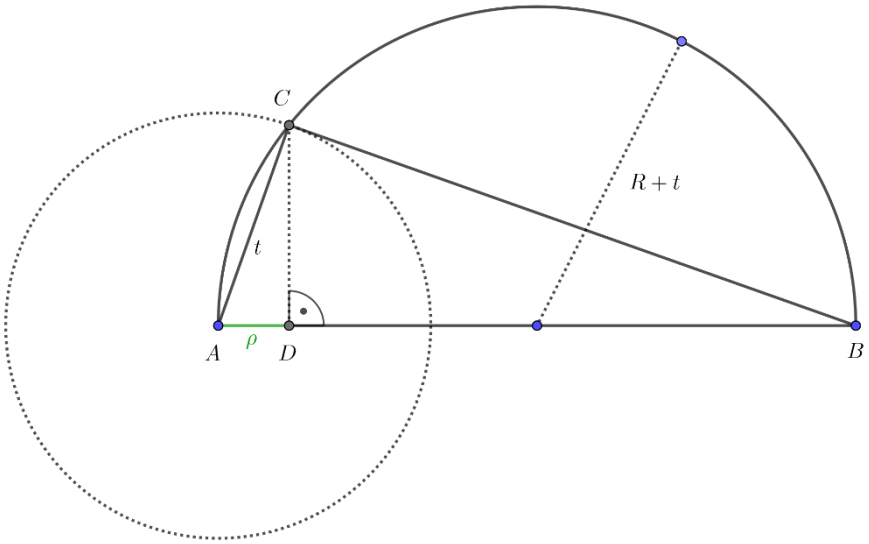
Mit Z und dem Berührungspunkt P_1 ist eine Gerade festgelegt. Sie schneidet den Kreis im Punkt P_2.



Nach dem Sekanten-Tangentensatz gilt:
$\rho \cdot (2R + \rho) = (t - \rho)^2$
$2R\rho + \rho^2 = t^2 - 2t\rho + \rho^2$
$2R\rho = t^2 - 2t\rho$
und damit
$2(R + t)\rho = t^2$ (1) oder
$\rho = \dfrac{t^2}{2(R + t)}$

Damit kann aus t und R der Radius ρ des Berührkreises berechnet werden.

Interpretiert man die Gleichung (1) mit dem Kathetensatz, so kann ρ auch konstruktiv bestimmt werden.
Dazu zeichnet man einen Thaleskreis mit dem Radius $R + t$ (die bisherigen Werte sind in einem anderen Massstab dargestellt). Werden die Endpunkte eines Durchmessers mit A bzw. B bezeichnet, so schneidet ein Kreis um A mit Radius t den Thaleskreis in C. Das Lot von C auf den Durchmesser schneide diesen in D. Nach dem Kathetensatz hat die Strecke AD gerade die Länge ρ.



In der Abbildung sind die berührenden Kreise für verschiedene Werte von t dargestellt.

