

#### 4. Harmonische Teilung einer Strecke, Satz des Apollonius, Crossed Ladders

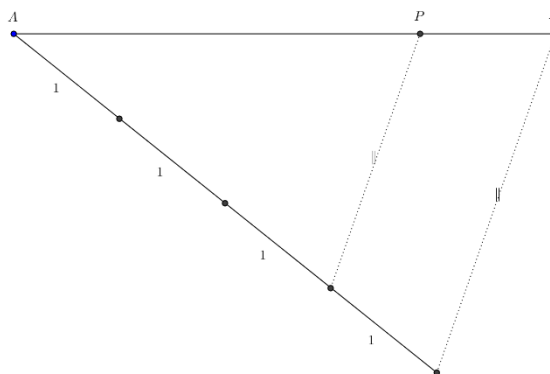
Aufgabe:

Teile die gegebene Strecke AB im Verhältnis  $m:n$  (Skizze:  $m:n = 3:1$ )

Lösung mit dem 1. Strahlensatz:

Auf einem Hilfsstrahl werden  $m+n = 4$  Einheiten abgetragen. P teilt die Strecke AB im Verhältnis 3:1

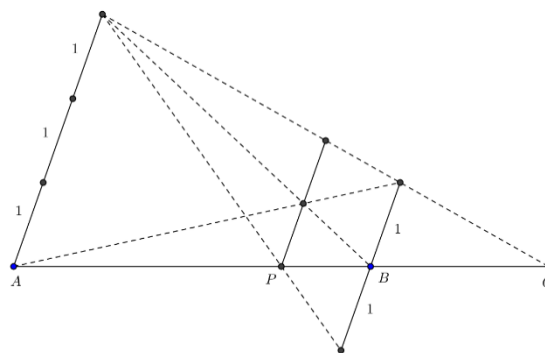
$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{3}{1}$$



Lösung mit 2. Strahlensatz

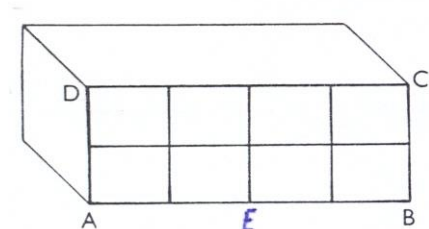
$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = \frac{3}{1}$$

P heisst innerer, Q äusserer Teilpunkt.  
Wird eine Strecke innen und aussen im gleichen Verhältnis geteilt, so spricht man von harmonischer Teilung.

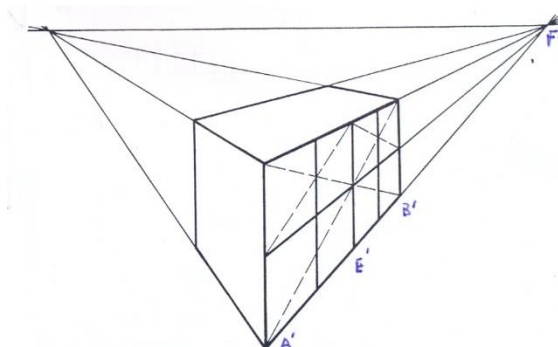


## Anwendung bei der Perspektiven Darstellung

Darstellung eines Quaders dessen Seitenflächen ABCD in 8 kongruente Rechtecke unterteilt ist.



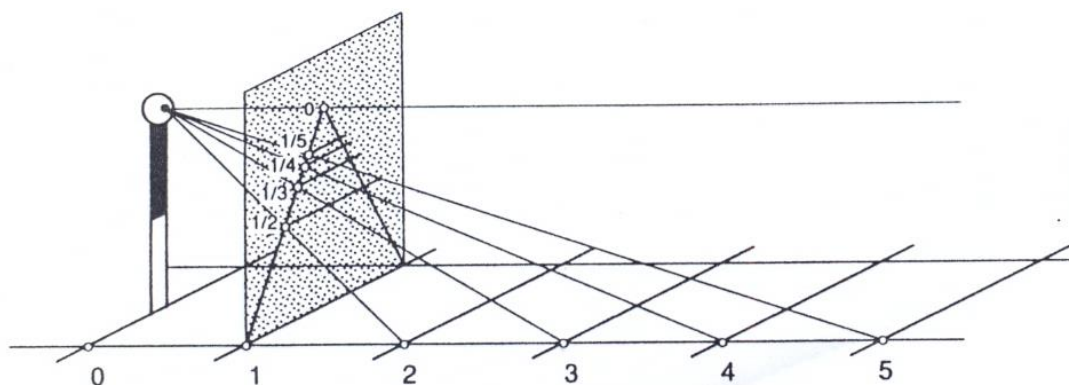
Darstellung im Schrägriss  
E ist Mitte der Strecke AB



Perspektive Darstellung  
E' ist perspektive Mitte von A'B'  
E' bzw. F' teilen die Strecke A'B' harmonisch  
F' Fluchtpunkt

Die folgende Skizze zeigt:

Eine arithmetische Folge wird vom Auge in eine harmonische verwandelt.

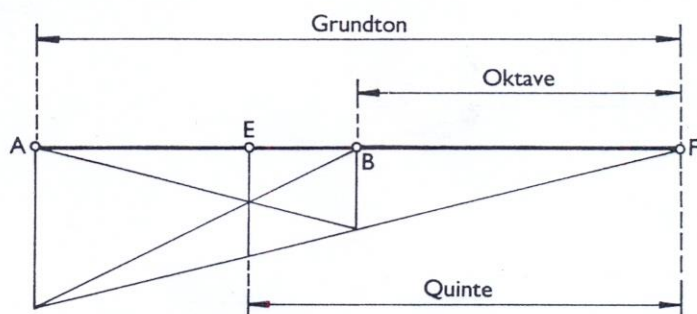


In der Musik spricht man von einem harmonischen Zusammenklang mehrerer Töne. Bei einem Saiteninstrument ist die Saitenlänge für die Oktave halb so lang wie die des Grundtons. Das harmonische Mittel  $h$  der Saitenlängen von Grundton und Oktave ist die Saitenlänge der Quinte. Da man unter dem harmonischen Mittel  $h$  zweier Zahlen  $p$  und  $q$

$$h = \frac{2pq}{p+q}$$

versteht, gilt tatsächlich:  $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}}$

In der Figur hat AF die Länge 1, die Saitenlängen von Grundton, Quinte und Oktave verhalten sich wie  $1 : \frac{2}{3} : \frac{1}{2}$ .



Mittelt man Grundton und Quinte harmonisch, so erhält man die Terz:

$$\frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}}$$

Aus Grundton und Terz resultiert als harmonisches Mittel die Sekund.

$$\frac{8}{9} = \frac{2 \cdot 1 \cdot \frac{4}{5}}{1 + \frac{4}{5}}$$

Für die Töne einer Dur-Tonleiter in reiner Stimmung ergeben sich damit die folgenden Saitenlängen:

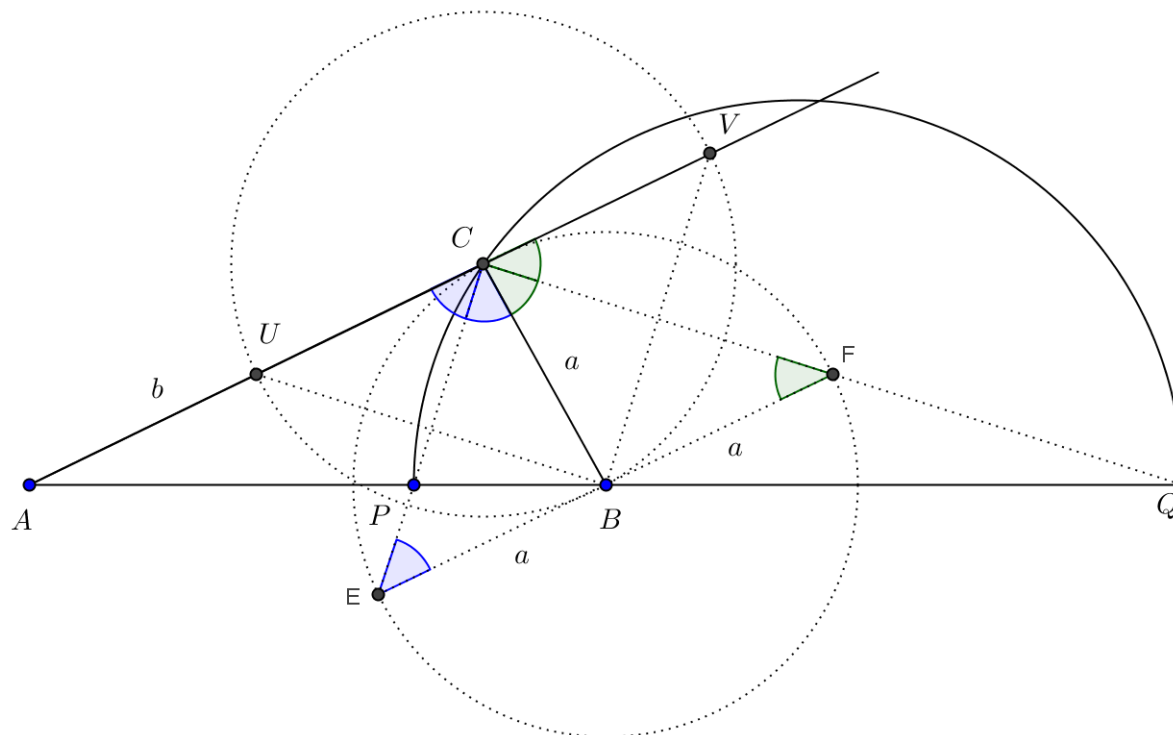
c	d	e	f	g	as	h	c'
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$

Wikipedia: Harmonische Tonleiter

## Ein Satz über die Winkelhalbierende eines Dreiecks

Jede Halbierende eines Innen- oder Aussenwinkels im Dreieck teilt die gegenüberliegende Seite harmonisch im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Spezialfall  $b : a = 1 : 1$  Mittelsenkrechte



Beweis:

Legt man durch B die Parallele zu b und trägt man von B aus die Strecke a ab so entsteht die Grundfigur zur Konstruktion der harmonischen Teilung der Strecke AB im Verhältnis  $b : a$ . Da innere und äussere Winkelhalbierende einen rechten Winkel einschliessen, liegt C auf dem Thaleskreis über den inneren und äusseren Teilpunkten P und Q der Strecke AB. Damit ist gezeigt:

Satz des Apollonius von Pergae (262 - 190 v. Chr.)

Die Punkte mit gegebenem Verhältniss  $b : a$  von zwei festen Punkten A und B liegen auf einem Kreis (Kreis des Apollonius) mit dem Durchmesser PQ. Dabei ist P der innere und Q der äussere Teilpunkt von AB im Verhältniss  $b : a$ .

Bemerkung:

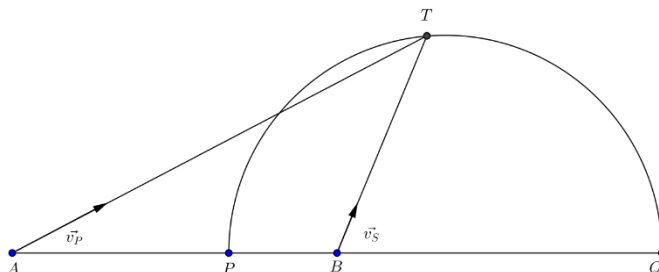
Es kann auch umgekehrt gezeigt werden, dass ein beliebiger Punkt C des Apolloniuskreises die Abstandsbedingung erfüllt.

Sei C ein beliebiger Punkt auf dem Apolloniuskreis, Trägt man auf AC von C aus die Strecke a ab so ergeben sich die Punkte U und V. Die geforderte Abstandseigenschaft folgt dann mit dem Strahlensatz.

Anwendung: Ein Verfolgungsproblem:

Ein Polizeiboot P verfolgt mit einer Geschwindigkeit  $\vec{v}_P$  ein Schmugglerboot S, das sich mit Geschwindigkeit  $\vec{v}_S$  in eine gegebene Richtung bewegt (Skizze:  $|\vec{v}_P| = 2|\vec{v}_S|$ ). Das Polizeiboot will das Schmugglerboot möglichst rasch einholen. Welches ist der kürzeste Einholweg?

Die möglichen Treffpunkte liegen auf dem Apolloniuskreis zum Verhältnis  $2 : 1$ . Die Endpunkte seines Durchmessers PQ ergeben sich durch harmonische Teilung der Strecke AB im Verhältnis  $2 : 1$ . Der nächstgelegene Treffpunkt T ist der Schnittpunkt des Apolloniuskreises mit der Geraden durch B in Richtung des Schmugglerboots.



## Das Crossed Ladders Problem

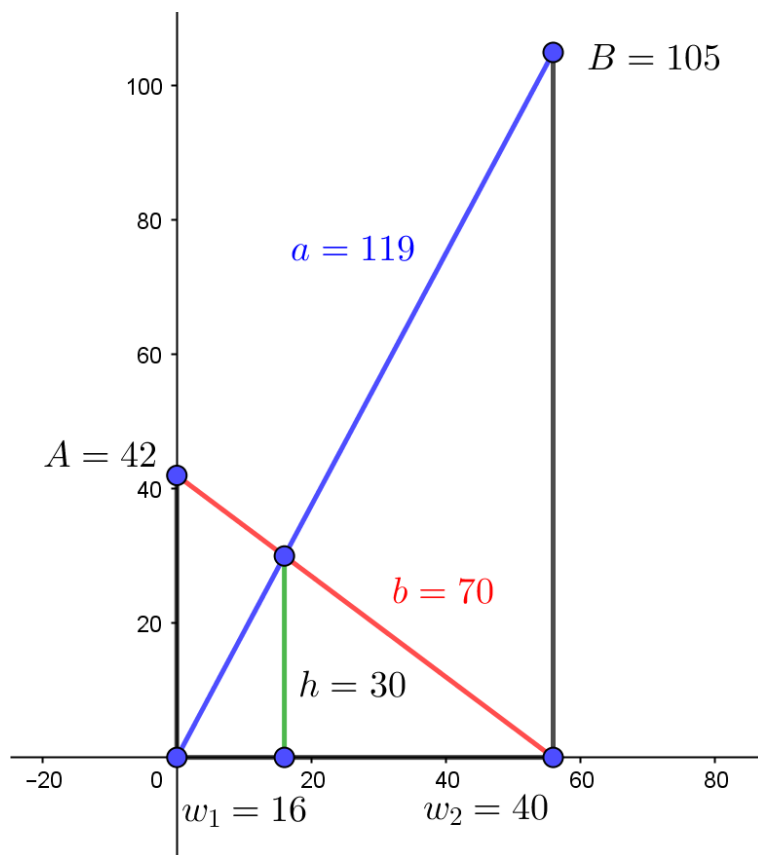
([https://en.wikipedia.org/wiki/Crossed\\_ladders\\_problem](https://en.wikipedia.org/wiki/Crossed_ladders_problem))

Martin Gardner untersuchte das Problem von zwei Leitern der Länge  $a$  und  $b$ , die sich zwischen zwei Wänden kreuzen. Die Leitern erreichen die Höhe  $A$  bzw.  $B$ , der Kreuzungspunkt hat die Höhe  $h$  über dem Boden. Dann gilt:

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \quad (1)$$

Das heisst:  $h$  ist das harmonische Mittel von  $A$  und  $B$ .

In der Abbildung ist eine ganzzahlige Lösung mit pythagoräischen Tripeln dargestellt.



Beweis:

Aus der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke folgt mit  $w_1 + w_2 = w$ :

$$\frac{w}{B} = \frac{w_1}{h}$$

$$\frac{w}{A} = \frac{w_2}{h}$$

$$\frac{w}{A} = \frac{w_2}{h}$$

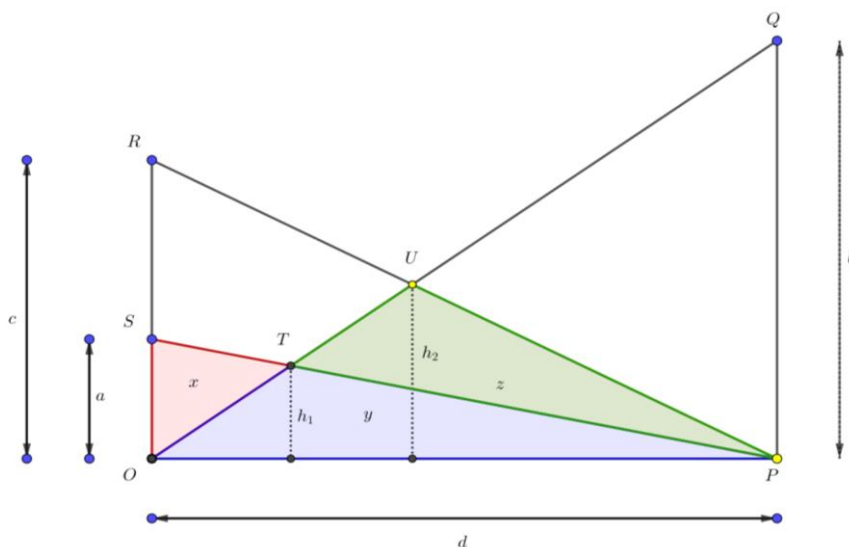
Addition der beiden Seiten führt auf:

$$\frac{w}{A} + \frac{w}{B} = \frac{w_1}{h} + \frac{w_2}{h} = \frac{w}{h}$$

und daraus nach Division durch  $w$  auf die Behauptung.

Als Folge von (1) kann bewiesen werden, dass durch die Inhalte  $x$ ,  $y$ ,  $z$  der gefärbten Dreiecke der Inhalt  $\Delta$  des Dreiecks OPR bestimmt ist, denn es gilt:

$$\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z}$$



Zunächst kann ein beliebiges Dreieck durch eine Scherung parallel zu OP in das bei O rechtwinklige Dreieck OPR abgebildet werden. Da die Scherung eine flächentreue Abbildung ist, verändern sich die Inhalte  $x$ ,  $y$ , und  $z$  nicht.

$$\begin{array}{l} \text{Crossed ladders in T:} \\ \text{Crossed ladders in U:} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{h_1} \\ \frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{1}{h_2} \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} \frac{1}{h_1} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b} \\ \frac{1}{h_2} - \frac{1}{c} = \frac{1}{b} \end{array}$$

Gleichsetzen der linken Seiten ergibt:

$$\frac{1}{h_1} - \frac{1}{a} = \frac{1}{h_2} - \frac{1}{c}$$

Die Gleichung wird mit  $\frac{1}{\frac{1}{2}d}$  multipliziert:

$$\frac{1}{\frac{1}{2} \cdot d \cdot h_1} - \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot d \cdot a} = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot d \cdot h_2} - \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot d \cdot c}$$

Im Nenner steht jeweils gerade der Inhalt eines bestimmten Teildreiecks:

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x+y} = \frac{1}{y+z} - \frac{1}{\Delta}$$

oder

$$\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z}$$

Der Inhalt  $w$  des Vierecks RSTU ergibt sich aus  $x, y$  und  $z$  zu

$$w = \frac{xz \cdot (x + 2y + z)}{y^2 - xz}$$

Für den Inhalt des OPR gilt:

$$\Delta = \frac{y \cdot (x + y) \cdot (y + z)}{y^2 - xz}$$

Eine Beweisvariante aus dem Internet

Der Inhalt des Dreiecks wird mit  $S$  (statt  $\Delta$ ) bezeichnet.

Der Grundgedanke des Beweises:

Bei Dreiecken mit gleicher Höhe bestimmt das Flächenverhältnis auch das Teilverhältnis der Grundseite.

Im Punkt  $F$  haben einerseits die Dreiecke  $AFE$  und  $ABF$  die gleiche Höhe. Es gilt also

$$\frac{EF}{FB} = \frac{x}{y}$$

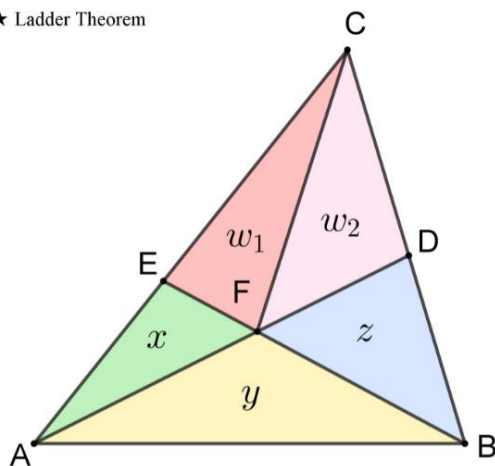
andererseits haben

die Dreiecke  $EFC$  und  $FBC$  die gleiche Höhe. Es gilt also

$$\frac{EF}{FB} = \frac{w_1}{w_2 + z}$$

und damit 1)

★ Ladder Theorem



$$w_1 + w_2 = w, \quad x + y + z + w = \triangle ABC = S$$

$$\begin{cases} x : y = w_1 : z + w_2 \Rightarrow \frac{w_1}{x} = \frac{z + w_2}{y} & 1) \\ y : z = x + w_1 : w_2 \Rightarrow \frac{w_2}{z} = \frac{x + w_1}{y} & 2) \\ x : w_1 = x + y : w + z \Rightarrow \frac{w_1}{x} = \frac{w + z}{x + y} & 3) \\ z : w_2 = y + z : w + x \Rightarrow \frac{w_2}{z} = \frac{w + x}{y + z} & 4) \end{cases}$$

$$\frac{z + w_2}{y} + \frac{x + w_1}{y} = \frac{w + z}{x + y} + \frac{w + x}{y + z} \quad 1) 3)$$

$$\frac{x + z + w}{y} = \frac{w + z}{x + y} + \frac{w + x}{y + z} \quad 2) 4)$$

$$\frac{S - y}{y} = \frac{S - (x + y)}{x + y} + \frac{S - (y + z)}{y + z}$$

$$\frac{S}{y} - 1 = \frac{S}{x + y} - 1 + \frac{S}{y + z} - 1$$

$$1 + \frac{S}{y} = \frac{S}{x + y} + \frac{S}{y + z}$$

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x + y} + \frac{1}{y + z}$$