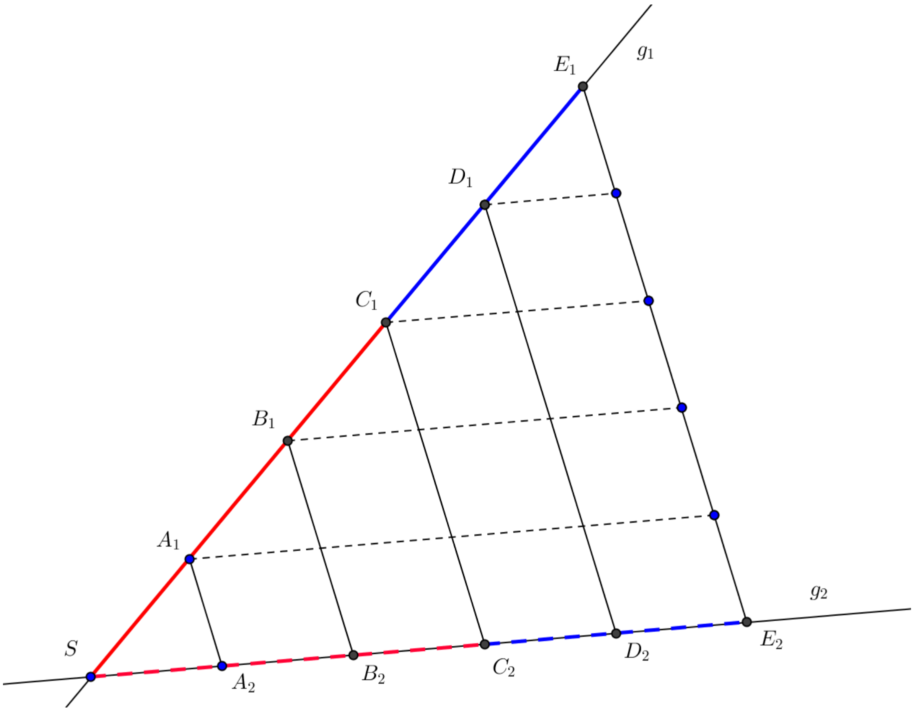
Elementargeometrie

1 Der 1. Strahlensatz

Geschichte:
In den „Elementen“ des Euklid wird im 5.Buch die „Proportionenlehre“ behandelt, d.h. die geometrische Theorie aller algebraischen Umformungen der Proportion $a : b = c : d$. Sehr wahrscheinlich stammt dieses Buch gar nicht von Euklid, sondern von Eudoxus von Knidos (um 350 v. Chr.).

Einführendes Beispiel:
Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden g_1 und g_2. Man trägt auf g_1 von S aus eine Strecke gegebener Länge mehrfach ab (Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 , E_1, F_1, ….). Ebenso trägt man auf g_2 von S aus eine zweite Strecke bis A_2A2 ab. Legt man nun durch die Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 , E_1, F_1, ...die Parallelen zur Geraden A_1A_2, so legen diese auf g_2 die äquidistanten Punkte B_2, C_2, D_2 , E_2, F_2, ...fest.



Die Strahlensätze machen eine Aussage über Streckenverhältnisse, nämlich:

Streckenverhältnisse auf g_1 werden durch die Parallelen auf g_2 übertragen, zB.:
$$\frac{\overline{SC_1}}{\overline{C_1E_1}} = \frac{\overline{SC_2}}{\overline{C_2E_2}} = \frac{3}{2}.$$
Dies ist im Wesentlichen die Aussage des 1. Strahlensatzes.

Legt man entsprechend die Parallelen zu g_2 durch die Punkt A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, so ergibt sich eine Aussage über das Verhältnis der Parallelenabschnitte (2. Strahlensatz),

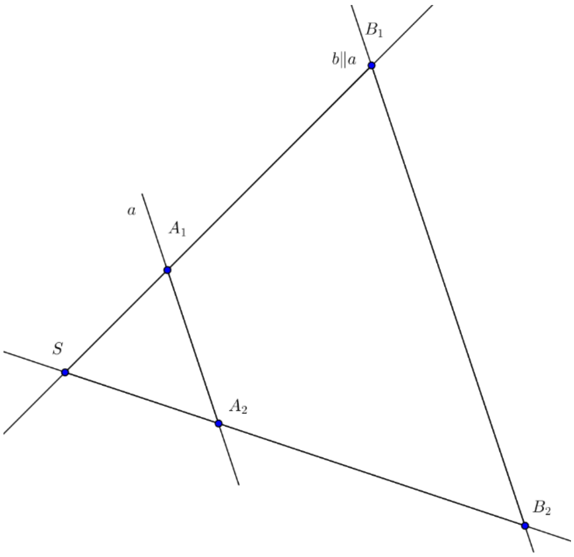
z. B. $\frac{\overline{E_1E_2}}{\overline{C_1C_2}} = \frac{\overline{SE_1}}{\overline{SC_1}} = \frac{5}{3}$.

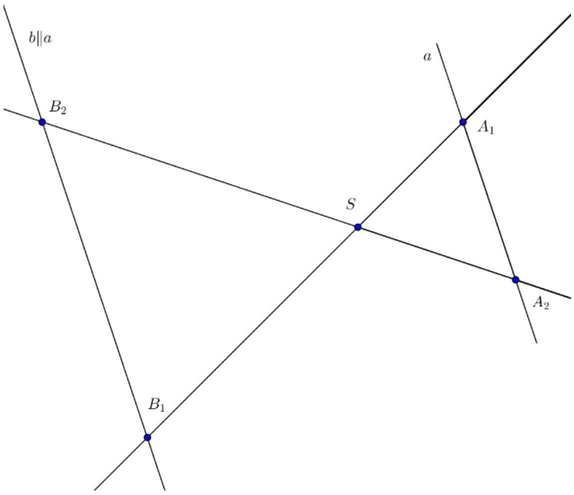
Allgemein gilt:

1. Strahlensatz:
Werden zwei sich im Scheitel S schneidende Geraden von parallelen Geraden geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf der einen Geraden wie die entsprechenden Abschnitte auf der andern.

Voraussetzung: a parallel zu b

Behauptung: $\frac{SA_1}{SB_1} = \frac{SA_2}{SB_2}$





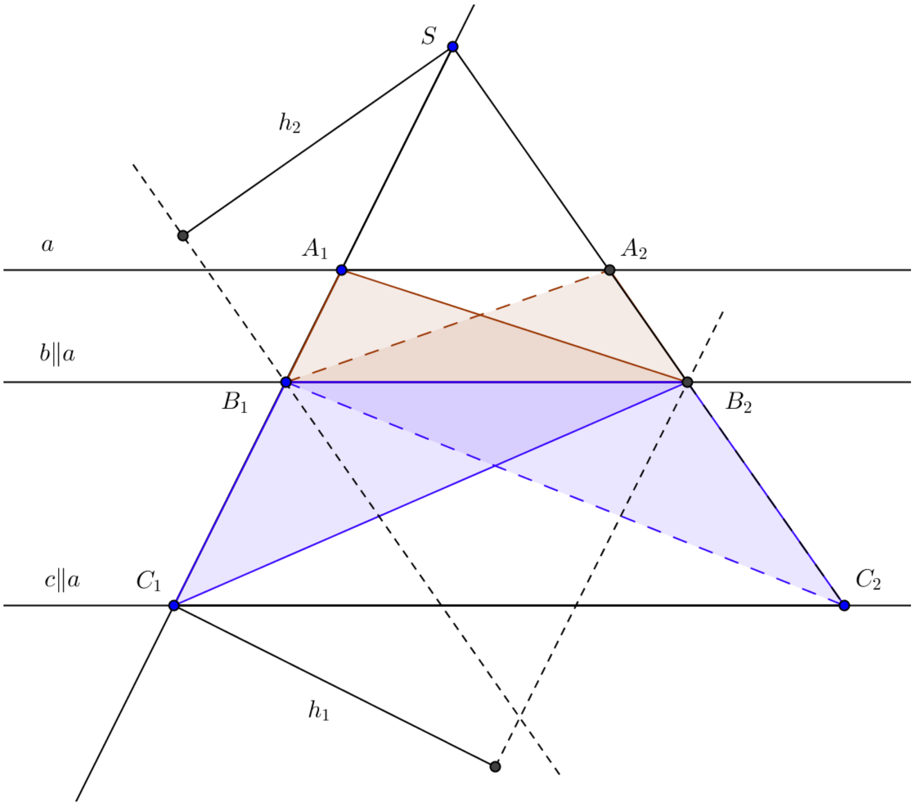
Bemerkung:
Der Satz bleibt auch richtig, wenn der Scheitel S zwischen den beiden Parallelen liegt.

Beweis des 1. Strahlensatzes im folgenden Fall:

Voraussetzung: Die Geraden a, b, c sind parallel

Behauptung: $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{B_2C_2}}$

Beweisidee: Es werden die Flächeninhalte geeigneter Dreiecke verglichen.



Das Dreieck $B_1B_2A_1$ ist flächengleich zum Dreieck $B_1B_2A_2$ und ebenso:
Das Dreieck $B_1B_2C_1$ ist flächengleich zum Dreieck $B_1B_2C_2$. Damit gilt für doppelten Flächen:

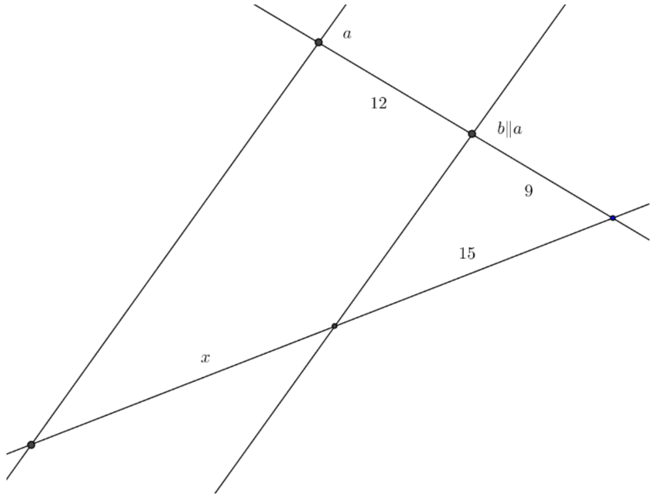
$2I(\Delta B_1B_2A_1) = 2I(\Delta B_1B_2A_2)$ oder $A_1B_1 \cdot h_1 = A_2B_2 \cdot h_2$
$2I(\Delta B_1C_1B_2) = 2I(\Delta B_2C_2B_1)$ oder $B_1C_1 \cdot h_1 = B_2C_2 \cdot h_2$

Die Behauptung folgt, indem man die beiden Seiten der Gleichungen dividiert.

Beispiele:

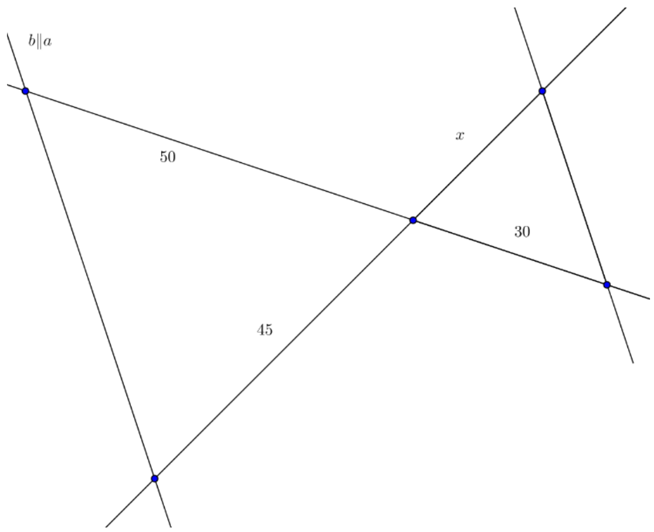
Die Geraden a, b (und c) sind parallel

1.



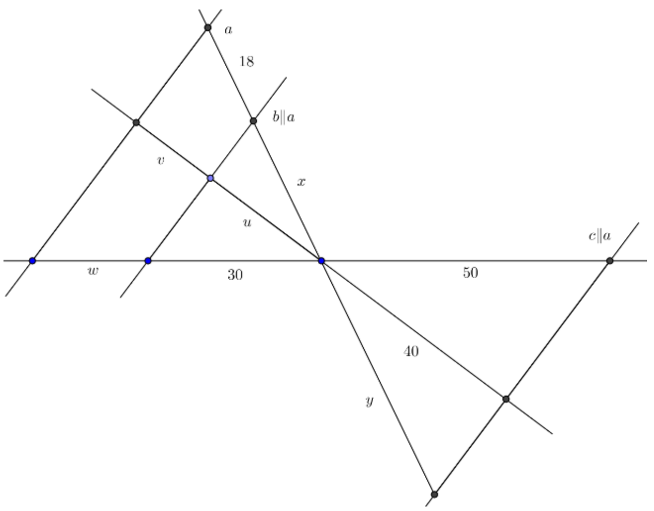
$$\frac{x}{15} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \qquad x = 20$$

2.



$$\frac{x}{45} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} \qquad x = 27$$

3. $u + v = 40$



$$\frac{u}{40} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} \qquad u = 24$$

v = 40 – u = 16 $\qquad v = 16$

$$\frac{w}{30} = \frac{v}{u} = \frac{2}{3} \qquad w = 20$$

$$\frac{x}{18} = \frac{3}{2} \qquad x = 27$$

$$\frac{y}{x} = \frac{5}{3} \qquad y = 45$$

2. Der 2. Strahlensatz

Der Satz macht eine Aussage über die Verhältnisse der Parallelenabschnitte.

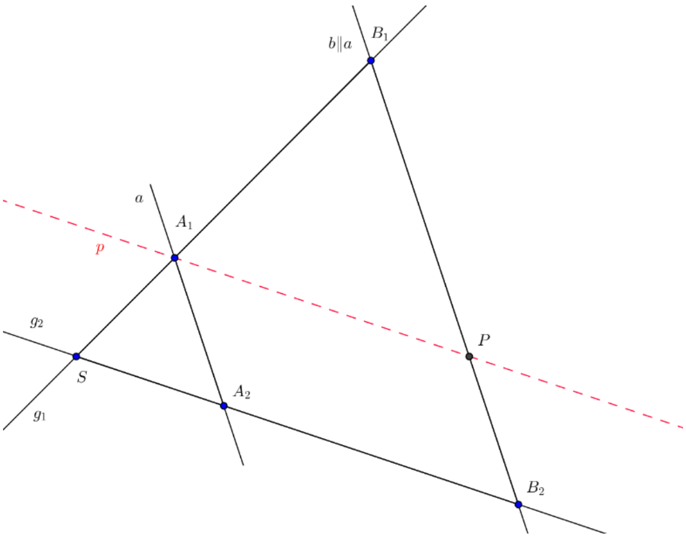
2. Strahlensatz

Werden zwei sich im Scheitel S schneidende Geraden von parallelen Geraden geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die **vom Scheitel S aus** gemessenen Abschnitte auf den Geraden.

Voraussetzung: a parallel zu b

Behauptung: $\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{B_1B_2}} = \frac{\overline{SA_1}}{\overline{SB_1}}$

Beweis:



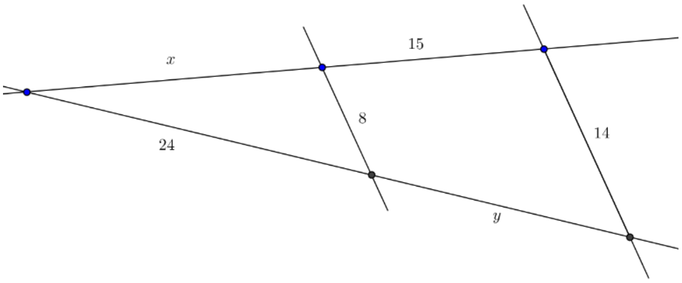
Legt man durch A_1 die Parallele p zu g_2, so ergibt sich der 2.Strahlensatz aus dem 1. Strahlensatz mit Scheitel B_1.

Wegen $\overline{PB_2} = \overline{A_1A_2}$ gilt

$$\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SB_1}} = \frac{\overline{PB_2}}{\overline{B_1B_2}} = \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{B_1B_2}} \quad \square$$

Beispiele:

1. $x=?$, $y=?$

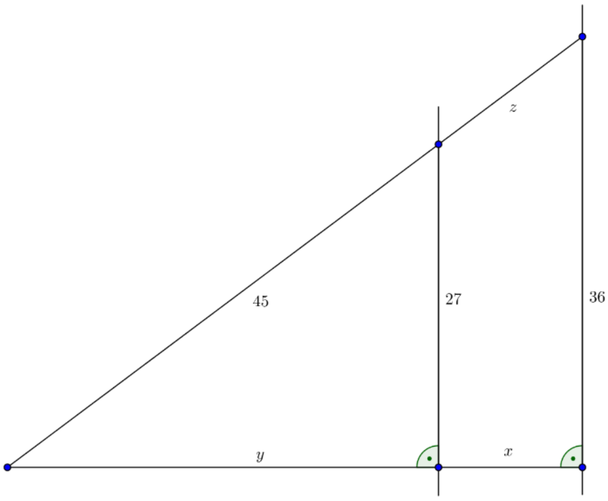


$$\frac{8}{14}=\frac{x}{x+15} \qquad 8x+120=14x$$

$$x=20$$

$$\frac{y}{24}=\frac{15}{x}=\frac{15}{20}\ \text{(1.SS)} \qquad y=18$$

2.



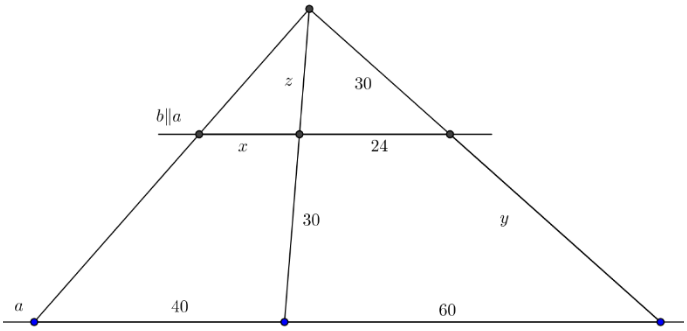
Pythagoras

$$y=\sqrt{45^2-27^2}=36 \qquad y=36$$

$$\frac{36}{27}=\frac{45+z}{45}\ \text{(2.SS)} \qquad z=15$$

$$\frac{x}{y}=\frac{z}{45}\ \text{(1.SS)} \qquad x=12$$

3.



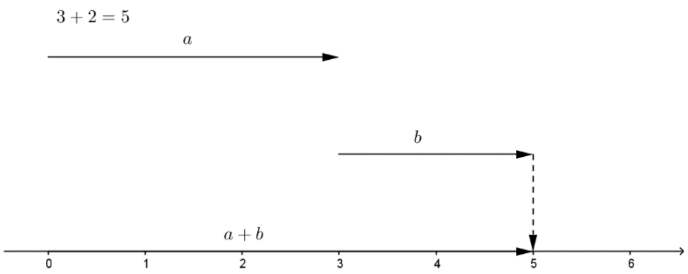
$$\frac{60}{24}=\frac{z+30}{z}\ \text{(2.SS)} \qquad z = 20$$

$$\frac{y}{30}=\frac{30}{z}=\frac{30}{20}=\frac{3}{2}\ \text{(1.SS)} \qquad y = 45$$

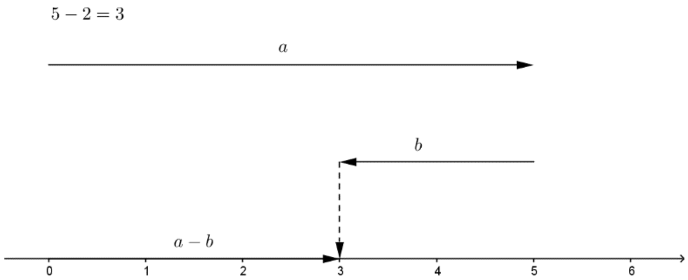
$$\frac{x}{40}=\frac{z}{z+30}=\frac{20}{50}=\frac{2}{5}\ \text{(2.SS)} \qquad x = 16$$

Lösung der elementaren arithmetischen Operationen durch Konstruktion

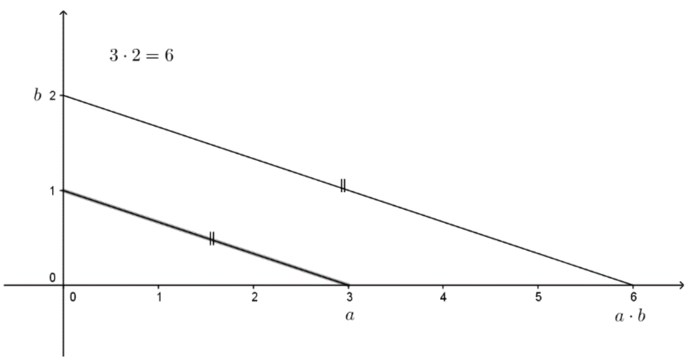
Summe:



Differenz



Produkt

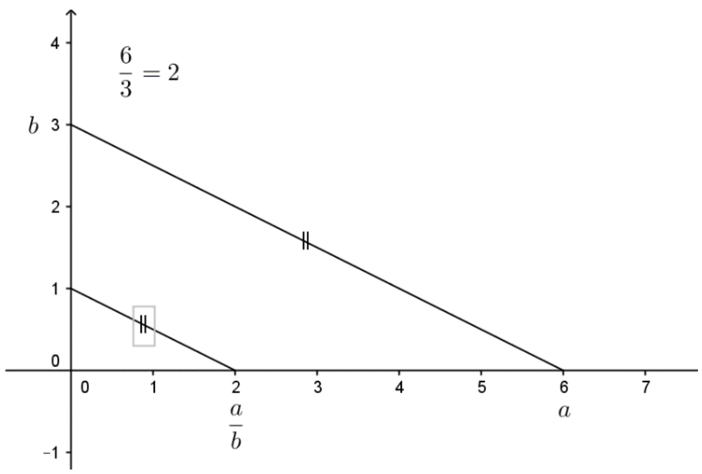


Die Gleichung
$x = x \cdot 1 = a \cdot b$
kann als Proportion geschrieben werden:

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{1}$$

Das Produkt $x = a \cdot b$
ergibt sich mit dem 1. Strahlensatz

Quotient

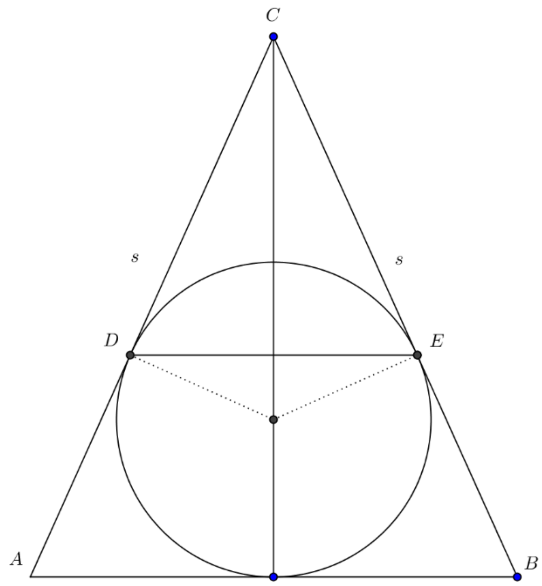


Die Gleichung
$x = \frac{a}{b}$
kann als Proportion geschrieben werden:

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{b}$$

Der Quotient $\frac{a}{b}$ ergibt sich mit dem 1. Strahlensatz

Aufgabe :
Einem gleichschenkligen Dreieck ist ein Kreis einbeschrieben. Die Verbindungs-sehne der Berührungspunkte des Kreises mit den Schenkeln hat eine Länge von 40 cm, die Grundlinie des Dreiecks eine solche von 90 cm. Welche Länge hat ein Schenkel?



Tipp:
Die Tangentenabschnitte haben gleiche Länge!

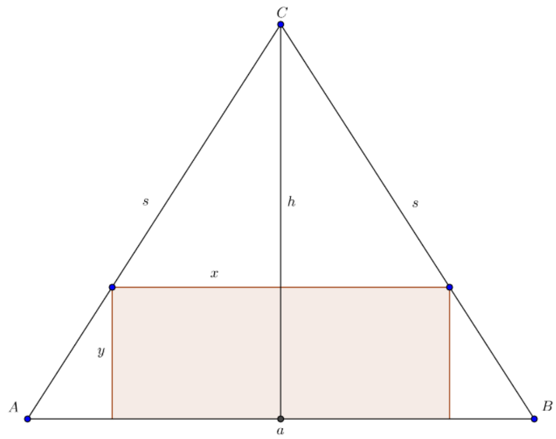
$\frac{40}{90} = \frac{s-45}{s} \quad s = 81$ cm

Aufgabe:
Einem gleichschenkligen Dreieck mit Basis $a = 36$ cm und $s = 82$ cm wird ein Rechteck vom Umfang $U = 138$ cm einbeschrieben. Welche Länge haben die Rechteckseiten.

Pythagoras: $h = \sqrt{82^2 - 18^2} = 80$
halber Umfang: $x + y = 69 \quad y = 69 - x$
2. Strahlensatz: $\frac{80}{80-y} = \frac{80}{80-(69-x)} = \frac{36}{x}$

$\frac{80}{11+x} = \frac{36}{x}$

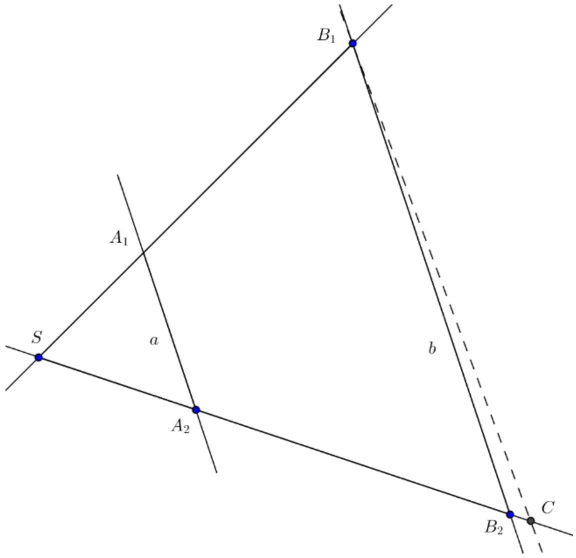
Rechtecksseiten: $x = 9$ cm und $y = 60$ cm



Es gilt auch die

Umkehrung des 1. Strahlensatzes:

Werden zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt von zwei Geraden geschnitten und sind die Verhältnisse der Längen entsprechender vom Anfangspunkt ausgehenden Strahlenabschnitte gleich gross, so sind die beiden Geraden parallel.



Voraussetzung: $\dfrac{\overline{SA_1}}{\overline{SB_1}} = \dfrac{\overline{SA_2}}{\overline{SB_2}}$

Behauptung: a parallel zu b

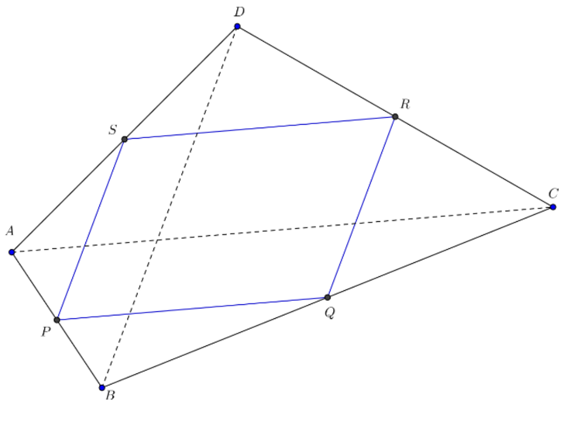
Beweis indirekt:
Annahme: b ist nicht parallel zu a. Die Parallele zu a durch B_1 schneide g_2 in C.
Damit gilt nach dem 1. Strahlensatz:

$$\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SB_1}} = \frac{\overline{SA_2}}{\overline{SC}}$$

Wegen der Voraussetzung folgt daraus $\overline{SC} = \overline{SB_2}$ im Widerspruch zur Annahme $B_2 \neq C$.

Ein Beispiel dazu:

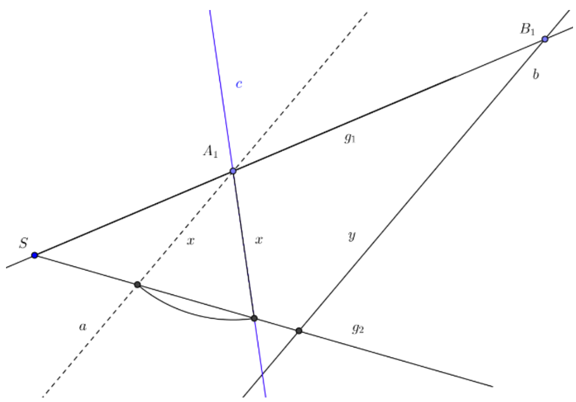
Satz:
Die Seitenmitten eines beliebigen Vierecks bilden ein Parallelogramm.



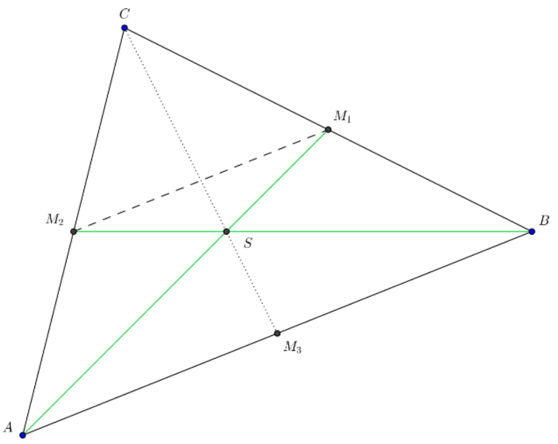
Beweis:
Wegen $\dfrac{\overline{AS}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{2}$ ist nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes PS parallel zu BD und wegen $\dfrac{\overline{CR}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{CQ}}{\overline{CB}} = \dfrac{1}{2}$ ist QR ebenfalls parallel zu BD. Die beiden gegenüberliegenden Seiten PS und RQ sind also parallel. Analog kann gezeigt werden, dass RS parallel PQ.

Die Umkehrung des 2. Strahlensatzes gilt wie die Figur zeigt hingegen nicht.

Die Proportion ist erfüllt, aber die Gerade c ist nicht zur Geraden b parallel.



Ein Satz über die Seitenhalbierenden:

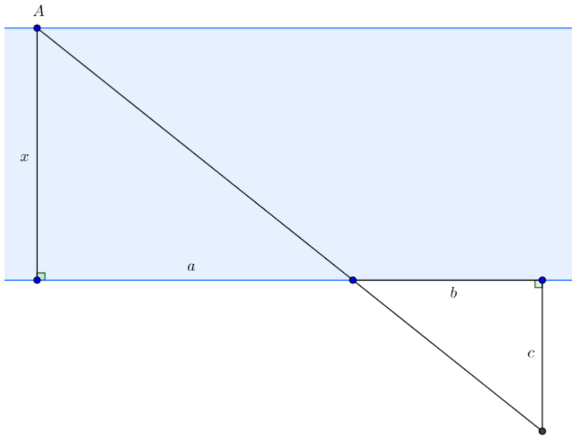


Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Schwerpunkt S des Dreiecks. S teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis $2:1$.

Beweisskizze:
a)
Nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes ist M_1M_2 parallel AB.
b)
Nach dem 2. Strahlensatz ist die Strecke $\overline{M_1M_2}$ halb so gross wie die Seite $\overline{AB}$ = c
c)
Nach dem 2. Strahlensatz erfüllt der Schnittpunkt S von zwei Seitenhalbierenden die Behauptung.
d)
Es ist noch zu zeigen, dass die vom Eckpunkt C ausgehende Seitenhalbierende ebenfalls durch S geht und von S im Verhältnis $2 : 1$ geteilt wird.

3. Anwendungen

1. Bestimmung der Breite eines Flusses

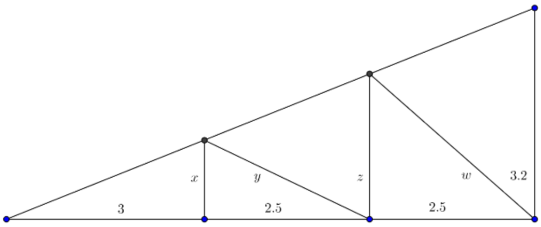


Zahlenbeispiel: a = 75 m, b = 55 m, c = 22 m

$\frac{x}{a} = \frac{c}{b}$ $x = \frac{ac}{b}$ = 30 m

2. Fachwerkträger

Gesucht ist die Länge der einzelnen Stäbe.



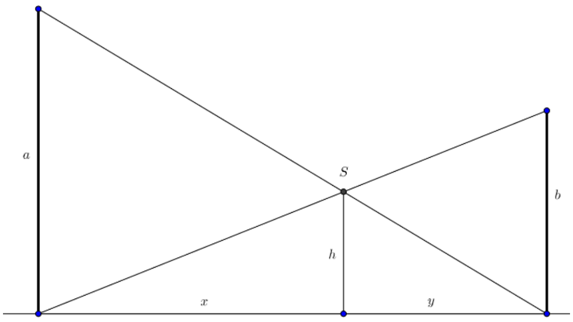
$\frac{x}{3.2} = \frac{3}{8}$ x = 1.2

$y = \sqrt{x^2 + 2.5^2} \approx 2.77$ y ≈ 2.77

analog   z = 2.2

w ≈ 3.3

3.
Auf einer waagrechten Oberfläche befinden sich zwei senkrechte Stangen der Länge a = 6m bzw. und b = 4 m. Die Endpunkte der Stäbe werden durch Seile so verbunden, dass die Seile sich im Punkt S kreuzen. Wie hoch liegt der Punkt S über der Oberfläche?

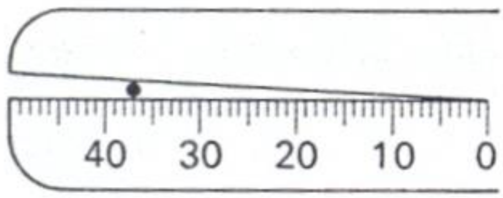


$\frac{a}{b} = \frac{\overline{SB}}{\overline{SC}} = \frac{x}{y} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad 2x = 3y$

$\frac{h}{a} = \frac{\overline{CS}}{\overline{CA}} = \frac{y}{x+y} = \frac{2y}{2x+2y} = \frac{2y}{3y+2y} = \frac{2}{5}$

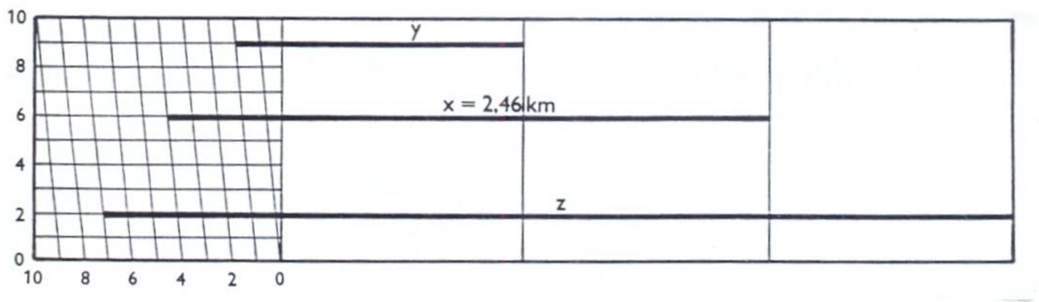
$h = \frac{2}{5} \cdot a = 2.4m$

4. Messlehre
Mit einer Messlehre kann man die Durchmesser dünner Drähte bestimmen. Wie dick ist der abgebildete Draht in der Figur, wenn der Einschnitt 5 cm tief und vorne 2 mm breit ist?



$\frac{d}{37} = \frac{2}{50}$ d ≈ 1.48 mm

5. Der Transversalmasstab



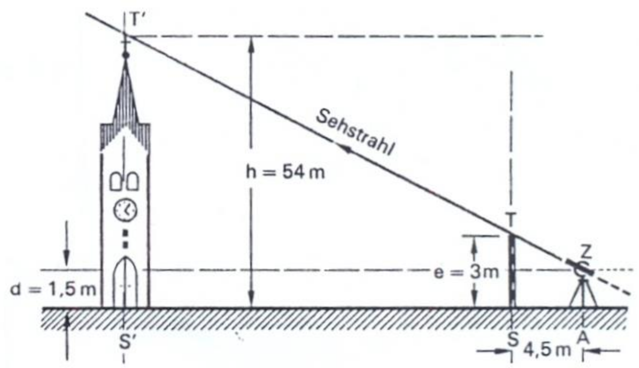
Der Transversalmasstab dient auf älteren Landkarten zur Bestimmung der wahren Länge von Strecken. Wie lang sind die Strecken y und z in Wirklichkeit, wenn der Kartenmass-stab 1 : 25 000 beträgt?
Aufgrund des 2. Strahlensatzes nehmen im Messgitter die Abschnitte zwischen schiefen Strecken und rechtem Rand gleichmässig zu, wenn man sich von unten nach oben bewegt. Auf der untern Skala können die Zehntel, auf der linken die Hundertstel abgelesen werden. (1 km entspricht auf diesem Transversalmasstab 4 cm).

Lösung:
y = 1.19 km, z = 3.72 km

6. Entfernungsmessung

Wie gross ist die horizontale Entfernung des Kirchturms vom Beobachter?

$$\frac{\overline{S'A}}{h-1.5} = \frac{4.5}{1.5} = 3 \qquad \overline{S'A} = 157.5m$$



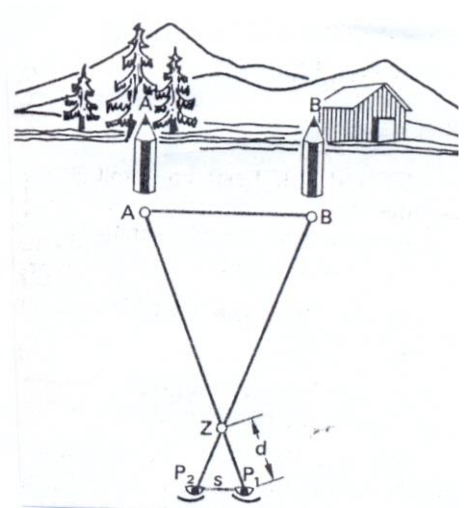
7. Schätzung von Entfernungen (Daumensprung)

Visiert man den Daumen zuerst mit dem rechten und dann mit dem linken Auge an, so kommt er mit zwei verschiedenen Geländepunkten A und B zur Deckung. Schätzt man nun die Länge der Strecke AB, so kann die Distanz ZA näherungsweise bestimmt werden.

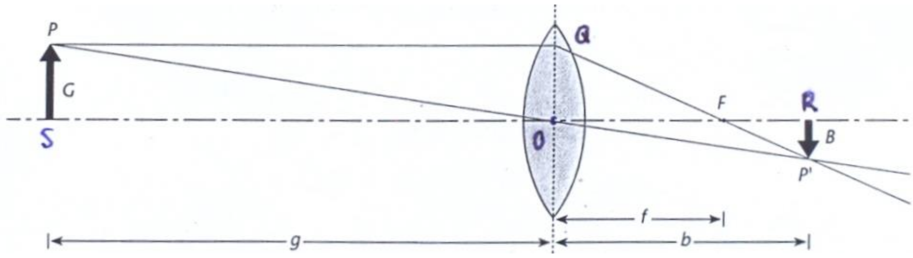
$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZP_1}} = \frac{\overline{AB}}{s} \text{ und daraus } \overline{ZA} = \frac{\overline{ZP_1}}{s} \cdot \overline{AB}$$

Wegen $\frac{\overline{ZP_1}}{s} \approx 10$ gilt näherungsweise

$$\overline{ZA} \approx 10 \cdot \overline{AB}$$



8. Die Linsenformel in der Optik



Bei einer Sammellinse gilt für den Verlauf bestimmter Lichtstrahlen:
Ein Strahl parallel zur optischen Achse SR geht hinter der Linse durch den Brennpunkt F.
Ein Strahl durch den optischen Mittelpunkt O verläuft ungebrochen weiter.

Bezeichnungen: g: Gegenstandsweite, b: Bildweite, f: Brennweite

Aus den Strahlensätzen folgt die für sehr dünne Linsen gültige Linsenformel, die bei bekannten g bzw. b die Bestimmung der Brennweite ermöglicht:

$$\frac{B}{G}=\frac{b}{g} \qquad (1)$$

$$\frac{B}{G}=\frac{b-f}{f} \qquad (2)$$

Gleichsetzen der rechten Seiten ergibt

$\frac{b}{g}=\frac{b-f}{f}=\frac{b}{f}-1$ und daraus nach Division durch b

$\frac{1}{g}=\frac{1}{f}-\frac{1}{b}$ und damit die

Linsenformel $\frac{1}{g}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$ Linsenformel.

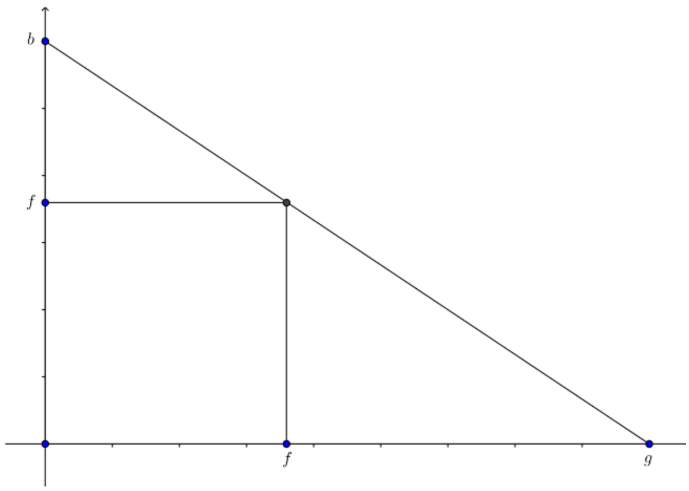
Die Linsenformel wird durch das folgende Nomogramm illustriert:

$$\frac{b}{f}=\frac{g}{g-f}$$

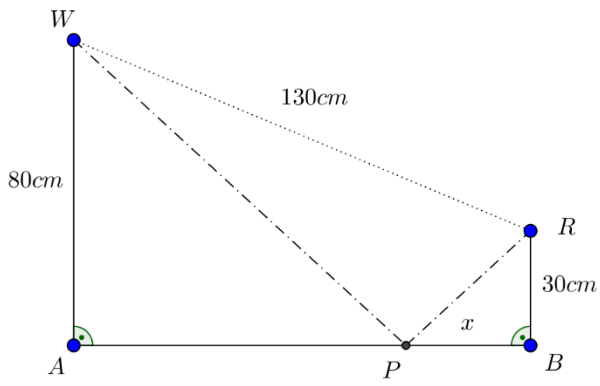
$bg-bf=gf$ durch bgf dividieren

$\frac{1}{f}-\frac{1}{g}=\frac{1}{b}$ und damit

$$\frac{1}{g}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$$



9. Ein Snooker-Problem (in Theorie)
Beim Snooker will ein Spieler mit der weissen Kugel in W die rote Kugel in R treffen. In welchem Punkt P im Abstand x von B muss die Kugel die Bande treffen, damit sie nach Reflexion an der Bande nach R gelangt?



Nach Pythagoras ist
$\overline{AB} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

Wird R nach R´ gespiegelt, so ergibt sich P als Schnittpunkt von AB und WR´.

Nach dem 2. Strahlensatz gilt:

$\frac{80}{30} = \frac{120 - x}{x}$

$8x = 360 - 3x$

$x = \frac{360}{11}$