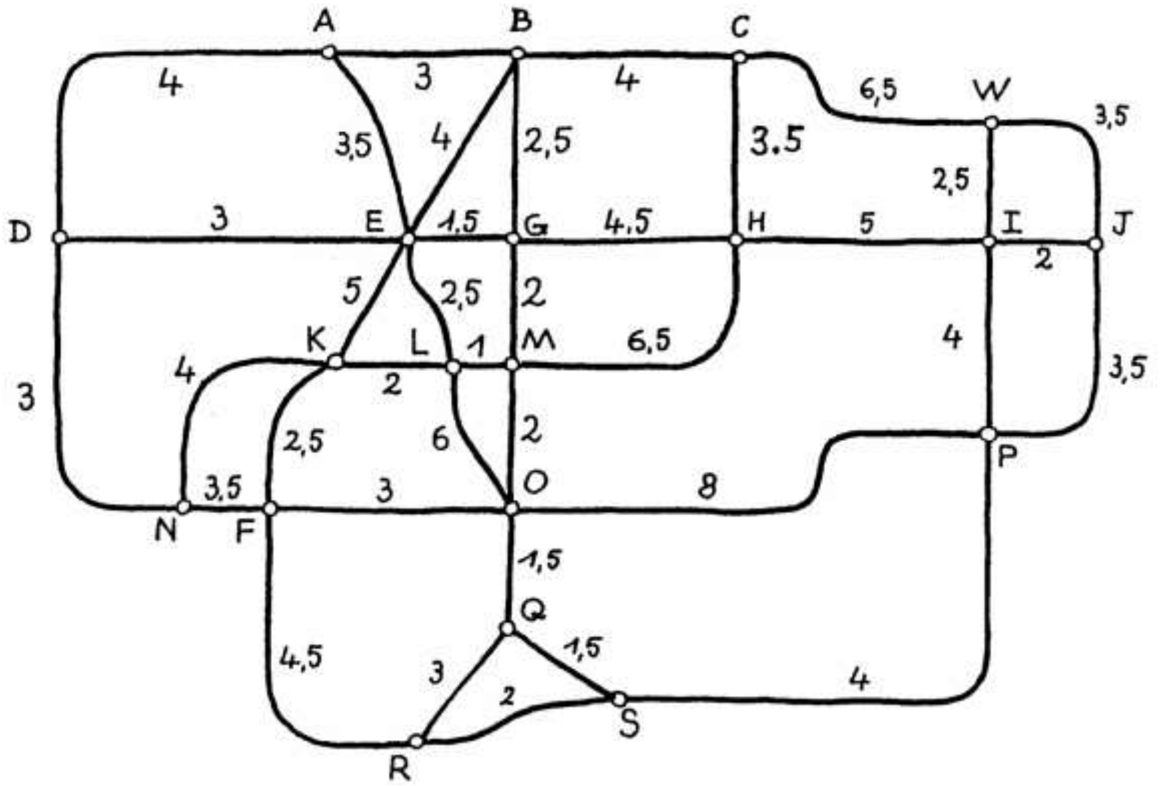
10. Algorithmische Aspekte der Kombinatorik

Kürzeste Wege (aus Dankwerts-Vogel)

Im folgenden Plan sind die wichtigsten Strassenverbindungen einer Stadt mit Erfahrungswerten für die Fahrzeiten in Minuten angegeben. Auf welchem Weg kommt man am schnellsten von W nach F?

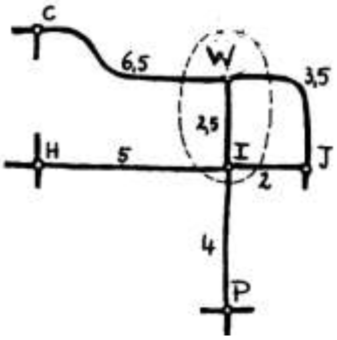


Um den kürzesten Weg von W nach F zu finden, werden von W ausgehend schrittweise kürzeste Wege immer grösserer Reichweite konstruiert.

1. **I** ist der W nächstgelegene Punkt.

2. Unter den Punkten, die ausserhalb des gestrichelten Gebiets liegen, sind diejenigen Punkte zu suchen, die W am nächsten liegen. Dies können nur Punkte sein, die mit W oder I direkt verbunden sind. Wir vervollständigen sämtliche Schnittkanten durch kürzeste Etappen und vergleichen die Länge der erhaltenen Wege.

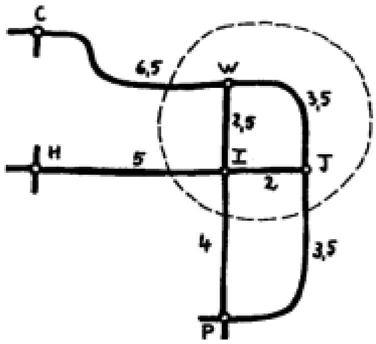
Schnittkante	erste Etappe	Länge des Vergleichswegs
WC	-	0 + 6.5 = 6.5
IH	WI	2.5 + 5 = 7.5
IP	WI	2.5 + 4 = 6.5
IJ	WI	2.5 + 2 = 4.5
WJ	**-**	**0 + 3.5 = 3.5**



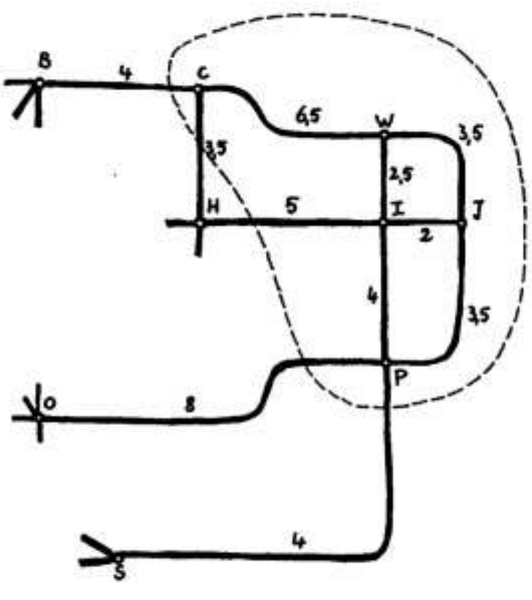
J liegt W am nächsten; er ist 3.5 Minuten von W entfernt.

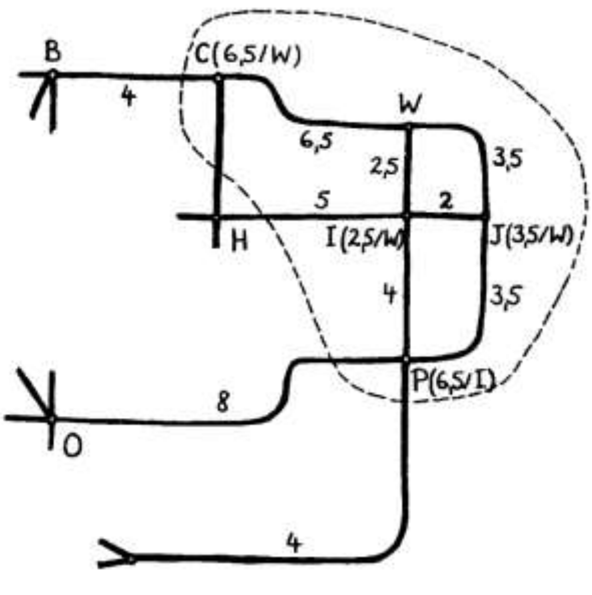
3. Wir blasen das Gebiet, das W, I, J enthält weiter auf

Schnittkante	erste Etappe	Länge des Vergleichswegs
WC	-	0 + 6.5 = 6.5
IH	WI	2.5 + 5 = 7.5
IP	WI	2.5 + 4 = 6.5
JP	WJ	3.5 + 3.5 = 7



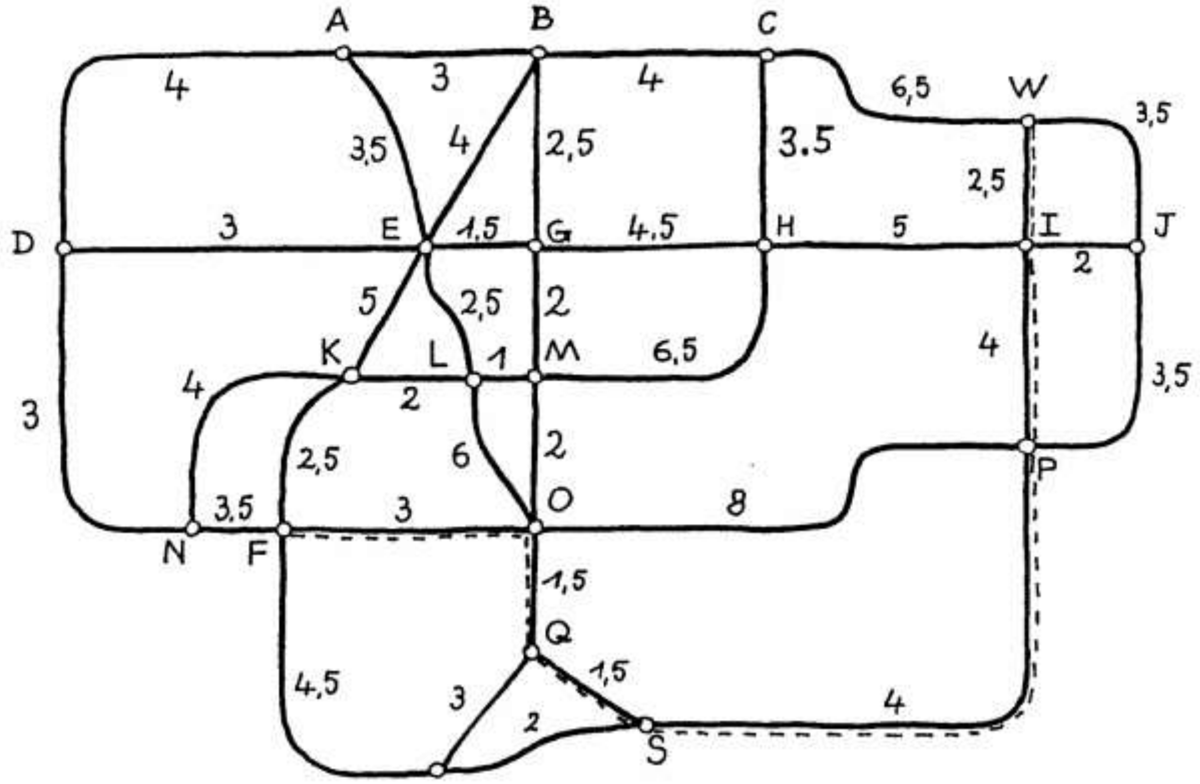
Wir notieren hinter jedem neu dazukommenden Punkt Entfernung von W und Endpunkt der zugehörigen ersten Etappe.





Schrittweise erhält man so den kürzesten Weg WIPSQOF mit der Fahrzeit 16.5 Minuten.

Beim Verfahren ist die Wolke maximal 19 mal zu vergrössern und bei jedem Schritt sind höchstens alle Kanten zu untersuchen. Da es höchstens $\binom{20}{2}$ Kanten gibt, hat man höchstens $19\cdot\binom{20}{2} = 3610$ Vergleiche vorzunehmen, also viel weniger als $18! \approx 6\cdot 10^{15}$ (maximale Anzahl der Wege durch alle Punkte des Netzes.



Das am Beispiel erläuterte Verfahren heisst

Algorithmus zur Suche eines kürzesten Weges von A nach Z (Dijkstra, 1959)

1. Schritt: Markiere A mit (- , 0).

2. Schritt: Suche unter den Kanten k, die einen markierten Punkt P mit einem nichtmarkierten Punkt Q verbinden, eine Kante k* = P*Q*, für die L(P) + l(k) minimal ist. L(P) ist dabei die zweite Komponente der Marke von P.
Markiere Q* mit (P*, L(P*) + l(k*).
Wiederhole diesen Schritt solange wie Z noch nicht markiert ist.

3. Schritt: Verfolge ausgehend von Z anhand der ersten Komponenten der Marken den Weg rückwärts bis A.
STOP; der gefundene Weg ist ein kürzester.