7. Binomischer Lehrsatz

Der binomische Lehrsatz macht eine Aussage über die Entwicklung von
$(a + b)^n \quad n = 0,1, \ldots$

Durch Ausmultiplizieren für verschiedene n erhält man:

$$
\begin{array}{llllllllll}
(a+b)^0 & & & & & 1 & & & & \\
(a+b)^1 & & & & a & + & b & & & \\
(a+b)^2 & & & a^2 & + & 2ab & + & b^2 & & \\
(a+b)^3 & & a^3 & + & 3a^2b & + & 3ab^2 & + & b^3 & \\
(a+b)^4 & a^4 & + & 4a^3b & + & 6a^2b^2 & + & 4ab^3 & + & b^4
\end{array}
$$

Die Koeffizienten, die sogenannten Binomialkoeffizienten, lassen sich im sogenannten **Pascal'schen Dreieck** anordnen. Das Schema wird von lauter Einsen berandet. Ein Koeffizient im Innern des Schemas ergibt sich als Summe der unmittelbar darüberliegenden Zahlen.
(siehe Ziffer 6.1)

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & \mathbf{6} & & \mathbf{4} & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & \mathbf{10} & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Allgemein gilt:

Binomischer Lehrsatz: $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k \qquad \textbf{(7)}$$

Bemerkungen:
Die Summe der Exponenten von a und b ist in jedem Glied gleich n
Die Entwicklung von $(a + b)^n$ hat $n + 1$ Summanden.

Beweisidee dieses Satzes im Falle n = 5
$(a + b)^5 = (a + b)\,(a + b)\,(a + b)\,(a + b)\,(a + b)$

Es sind alle Produkte zu addieren, die aus je einem Summanden der 5 Klammern bestehen.
Um etwa a^3b^2 zu erhalten, hat man in genau 3 der 5 Klammern a auszuwählen, dies kann auf $\binom{5}{3}$ Arten geschehen.

Beispiele:

1.
Wie heisst der Koeffizient von a^3b^6 in der Entwicklung von $(a + b)^9$?

Antwort:
$\binom{9}{3}$ oder $\binom{9}{6}$

2.
Es ist die Zahl 1.008^4 näherungsweise auf drei Stellen nach dem Dezimalpunkt zu berechnen:
$1.008^4 = (1+0.008)^4 \approx 1+4\cdot 0.008 = 1.032$ TR-Wert: 1.032386052

3.
Längenausdehnung eines Stabes: $l = l_0 \cdot (1+\alpha\,\Delta T)$
Der Volumenzuwachs beträgt näherungsweise: $V = V_0 \cdot (1+\alpha\,\Delta T)^3 \approx V_0 \cdot (1+3\alpha\,\Delta T)$

4.
$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+....+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$
Anzahl der Teilmengen einer Menge von n Elementen
oder Summe der Binomialkoeffizienten bei einer Zeile im Pascalschen Dreieck

4.
Beim Sporttoto gibt es bekanntlich 3^{13} Tipmöglichkeiten. Aus der Darstellung
$$3^{13} = (2+1)^{13} = \sum_{k=0}^{13}\binom{13}{k}2^k$$
ergeben sich nach dem Binomischen Lehrsatz die Anzahl der k-er für k = 0,1,2,...., 13.

Übungsaufgabe:
$(\sqrt{2}-1)^6 = 99-70\sqrt{2}$

Geschichtliches:
Blaise Pascal (1623 - 1662) stellte sein Zahlendreieck in einer Arbeit vor ("Traité du Triangle Arithmetique"), die erst nach seinem Tode veröffentlicht wurde (1665). Jedoch erschien dieses Dreieck bereits in früheren Arbeiten, die Pascal vermutlich nicht bekannt waren, so etwa Chu Shih - Chieh's "Ssu Yuan Yii Chien" aus dem Jahre 1303.