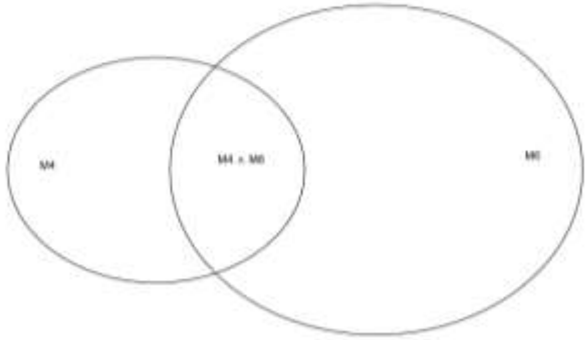
8. Prinzip vom Ein- und Ausschluss

Beispiel:
Wieviele der ersten 100 natürlichen Zahlen sind durch 4 oder 6 teilbar?

Das Problem kann in einem sogenannten Venndiagramm veranschaulicht werden. (J. Venn (1834-1923) engl. Logiker, Professor an der Universität von Cambridge)



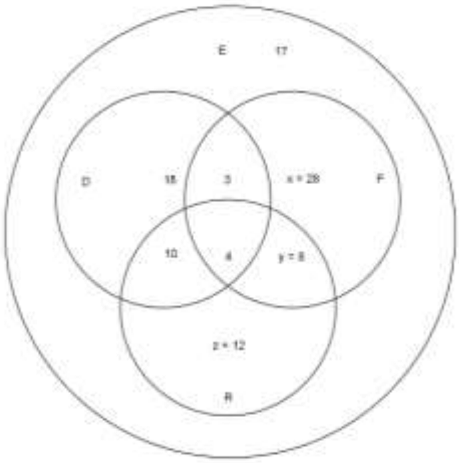
Sei M_4 die Menge der Vielfachen von 4 bzw. M_6 die Menge der Vielfachen von 6. Für ihre Mächtigkeiten (Anzahl der Elemente) gilt: $|M_4| = 25$ bzw. $|M_6| = 16$ bzw. für die Menge der gemeinsamen Vielfachen $|M_{12}| = 8$. Für die gesuchte Anzahl gilt damit:
$|M_4 \cup M_6| = |M_4| + |M_6| - |M_4 \cap M_6| = 25 + 16 - 8 = 33$.

Ein- und Ausschaltprinzip $\left|A \cup B\right| = \left|A\right| + \left|B\right| - \left|A \cap B\right|$

Wie heisst das Prinzip für drei Mengen? Dies wird am folgenden Beispiel untersucht:

An einer internationalen Tagung für Baufachleute nehmen 100 Ingenieure aus verschiedenen Sprachgebieten teil. Bei einer Umfrage unter den Tagungsteilnehmern wird festgestellt, dass sämtliche Leute die englische Sprache beherrschen, darüber hinaus aber noch 35 Leute deutsch, 43 Leute französisch, 34 Leute russisch, 7 Leute deutsch und französisch, 14 Leute deutsch und russisch, 4 Leute deutsch, französisch und russisch sprechen. 17 Teilnehmer gaben an, dass sie nur englisch sprechen.

Wir führen die folgenden Mengen ein:
D Menge aller deutschsprechenden Teilnehmer,
F Menge aller französischsprechenden Teilnehmer,
R Menge aller russischsprechenden Teilnehmer.
Im Venndiagramm entstehen 8 Felder. Die Bestimmung der fehlenden Mächtigkeiten führt auf das folgende Gleichungssystem:



$$\left| \begin{array}{rl} x + y + 7 & = 43 \\ y + z + 14 & = 34 \\ x + y + z + 52 & = 100 \end{array} \right|$$

mit der Lösung x = 28, y = 8, z = 12.

Weitere Beispiele:
Wieviele der Zahlen von 1 bis 1200 sind durch 2 oder 3 oder 5 teilbar?
600 + 400 + 240 - 200 - 120 - 80 + 40 = 880.
Wieviele der Zahlen von 1 bis 999 sind weder durch 5 noch durch 7 teilbar? (457)