

(*) 6.2 ungeordnete k-Stichprobe mit Zurücklegen, Kombinationen mit Wiederholungen

Aus einer Urne mit n Kugeln, werden k Kugeln mit Zurücklegen gezogen, ohne dass die Reihenfolge beachtet wird.

Einführendes Beispiel:

Aus $n = 4$ Elementen sind $k = 3$ auszuwählen:

111 122 134 224 333

112 123 144 233 334

113 124 222 234 344

114 133 223 244 444

Entsprechend den 4 Elementen betrachten wir 4 Urnen, die durch 4 - 1 Wände getrennt sind. Für jede Wahl wird in die entsprechende Urne eine Kugel gelegt. Die Wahl 224 kann dann durch |OO|O codiert werden, also durch ein Wort mit 6 Zeichen (4 - 1 Trennwände | und 3 Kugeln O. Aus den 6 möglichen Stellen sind die Positionen der 4 - 1 Trennwände oder die Positionen der 3 Kugeln auswählen.

Die gesuchte Anzahl beträgt damit $\binom{6}{3}$.

Im allgemeinen Fall mit $n - 1$ Trennwänden | und k Kugeln O gilt:

Anzahl der ungeordnete k-Stichproben mit Zurücklegen (6)

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

Kombinationen von n Elementen zur k -ten Klasse mit Wiederholungen.

Beispiel:

Yatzee: Fünf nichtunterscheidbare Würfel werden geworfen. Wieviele Wurfbilder sind möglich?

1 2 2 4 6 und 4 2 1 2 6 sind nicht unterscheidbar Aus den 6 Augenzahlen sind 5 auszuwählen.

Es gibt also $\binom{6+5-1}{6-1} = \binom{6+5-1}{5} = \binom{10}{5}$ Wurfbilder.

Eine andere Interpretation des Resultats:

Erhöht man die 2. Augenzahl um 1, die 3. um 2, die 4. um 3 und die 5. um 4 so entsteht aus dem Wurfbild 1 2 2 4 6 das neue Wurfbild 1 3 4 7 10 (aus 10 verschiedenen Elementen sind 5 auszuwählen).