

6. ungeordnete k-Stichproben, Kombinationen, Binomialkoeffizienten

6.1 Kombinationen ohne Wiederholungen, ungeordnete k-Stichprobe ohne Zurücklegen

Aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln werden k Kugeln **mit einem Griff** gezogen. Wir sprechen von ungeordneten k -Stichproben ohne Zurücklegen bzw. Kombinationen von

n Elementen zur k -ten Klasse. Die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten wird mit $\binom{n}{k}$

bezeichnet. Die Zahlen $\binom{n}{k}$ heissen (nomen est omen!) **Binomialkoeffizienten**.

Einführendes Beispiel:

Kombinationen von 5 Elementen zur 3. Klasse

ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE

BCD, BCE, BDE,

CDE

Ergebnis: $\binom{5}{3} = 10$ Warum?

Jede der $\binom{5}{3}$ Kombinationen erzeugt 3! Wörter (Variationen): z.B. erzeugt ACE die Wörter

ACE, AEC, CAE, CEA, EAC, ECA. Auf diese Art entstehen alle möglichen Wörter, also gilt:

$$\binom{5}{3} \cdot 3! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \text{ und damit } \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!}$$

Herleitungsvariante:

Das Ergebnis kann auch durch Zurückführen auf Permutationen mit Wiederholungen hergeleitet werden:

ACE wird codiert durch 10101 (1: A wird ausgewählt, 0: B wird nicht ausgewählt, ...).

$$\text{Damit gilt: } \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!}$$

Allgemein:

Anzahl k-Stichproben ohne Zurücklegen

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad (5)$$

Kombinationen von n Elementen zur k. Klasse

Beispiele:

1.

$$\binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Tipp:

Da beim Beispiel im Zähler und Nenner je $k=3$ Faktoren. Ist es empfehlenswert, zunächst Faktoren im Nenner zu schreiben, der Zähler ergibt sich dann, indem man von $n=12$ absteigend gleich viele Faktoren schreibt.

Auch bei diesen Beispielen gilt: Zunächst sofern möglich dividieren, dann multiplizieren

2.

Beim Zahlenlotto sind aus 45 Zahlen 6 auszuwählen. Es gibt also

$$\binom{45}{6} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot}{3 \cdot 6} = \frac{15 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 7 \cdot 41 \cdot}{3 \cdot 6} = 94\,143\,280$$

verschiedene Tippmöglichkeiten.

3.

Beim Viererschieber erhält ein Spieler 9 von insgesamt 36 Karten. Dies ist auf

$$\binom{36}{9} = 94\,143\,280 \text{ Arten möglich.}$$

4.

Begrüßen sich 6 Personen, dann werden $\binom{6}{2} = 20$ mal die Hände gedrückt.

Spezialfälle:

$$\binom{n}{n} = 1, \binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n$$

Die beiden folgenden Eigenschaften sind hin und wieder nützlich:

1. Symmetrieeigenschaft der Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad k \text{ Elemente auswählen, heisst } n - k \text{ Elemente nicht auswählen.}$$

Beispiel:

$$\binom{100}{98} = \binom{100}{2}$$

2. Bildungsgesetz des Pascalschen Dreiecks

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \quad (*)$$

Beispiel:

$$\binom{6}{3} = \binom{5}{2} + \binom{5}{3}$$

Dir folgende Aufgabe illustriert die Beweisidee:

Aufgabe:

Eine Klasse mit 14 ($n + 1$) Studierenden bildet eine Mannschaft zu 6 ($k + 1$) Studierenden. Auf wieviele Arten ist dies möglich?

Aus 14 Studierenden können auf $\binom{14}{6}$ Arten 6 Studierende ausgewählt werden.

Bei $\binom{13}{5}$ Mannschaften ist eine bestimmte Person dabei, bei $\binom{13}{6}$ nicht, womit gilt:

$$\binom{14}{6} = \binom{13}{5} + \binom{13}{6}$$

1.

Beweis von (*) durch kombinatorische Überlegungen

Aus $n + 1$ Elementen können $k + 1$ Elemente auf $\binom{n+1}{k+1}$ Arten ausgewählt werden.

Bei $\binom{n}{k}$ Auswahlen ist ein bestimmtes Element (das schwarze Schaf) dabei, bei $\binom{n}{k+1}$ nicht, woraus die Behauptung folgt.

2.

Beweis von (*) durch Anwenden der Definition der Binomialkoeffizienten

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n! \cdot (k+1)}{k!(n-k)!(k+1)} + \frac{n! \cdot (n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!(n-k)} \\ &= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

Bei den folgenden Aufgaben kommen Fallunterscheidungen vor:

1.

Auf einem Tennisplatz sind 7 Damen und 5 Herren. Wieviele Partien mit 2 Spielern sind möglich?

Gesamtzahl $\binom{12}{2}$

davon

$\binom{7}{2}$ (Dame gegen Dame)

$\binom{7}{1} \binom{5}{1}$ (Dame gegen Herr)

$\binom{5}{2}$ (Herr gegen Herr) womit gilt:

$$\binom{12}{2} = \binom{7}{2} + \binom{7}{1} \binom{5}{1} + \binom{5}{2}$$

2.

Eine Gesellschaft von 8 Personen soll für eine Flussüberfahrt auf 3 Boote aufgeteilt werden. Das erste Boot fasst 1 Person, das zweite 3 und das dritte 4 Personen. Auf wieviele Arten kann man die Gesellschaft auf die 3 Boote verteilen, wenn zwei Personen darunter sind, die keinesfalls im gleichen Boot sitzen möchten ?

Von der Gesamtzahl der möglichen Fälle: $\binom{8}{1}\binom{7}{3}$

ist die Anzahl der verbotenen Fälle zu subtrahieren (beide verfeindete Personen sind im Boot B oder C).

Damit gilt für die Anzahl der erlaubten Zustände: $\binom{8}{1}\binom{7}{3} - 6\left(5 + \binom{5}{3}\right) = 190$

Lösungsvariante:

Man betrachtet alle erlaubten Zustände.

3.

Aus n Frauen und n Männern soll ein n -köpfiger Ausschuss gewählt werden. Berechne auf zwei Arten die Anzahl der Möglichkeiten und beweise so die entsprechende Formel!

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Die Gesamtzahl der möglichen Ausschüsse $\binom{2n}{n}$ ist gleich der Summe der Ausschüsse mit genau k Frauen. Dazu sind aus n Frauen k auszuwählen und aus n Herren genau $n - k$.

Dies geht auf $\binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$ Arten.

Andere Einkleidung:

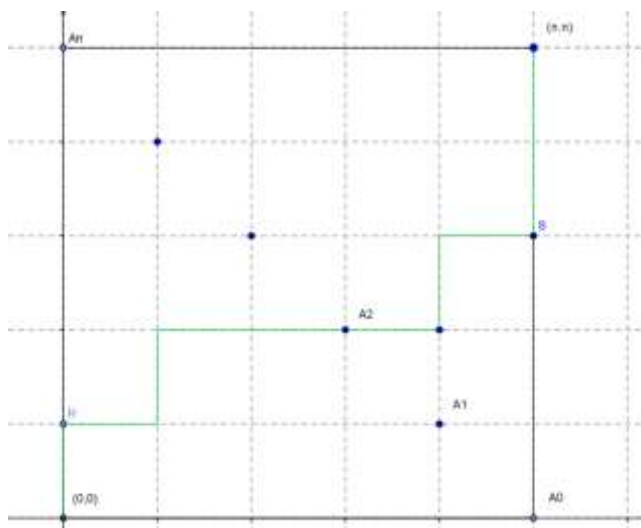
Gesucht ist die Anzahl der Wege von $(0, 0)$ nach (n, n) auf zwei Arten:

a) direkt

b) durch Berechnung der Wege über

A_0, A_1, \dots, A_n

und Addition dieser Zahlen.



4.

Auf wie viele Arten können $2n$ Personen in n Zweiergruppen eingeteilt werden?

Das erste Paar kann auf $\binom{2n}{2}$ Arten ausgewählt werden, das zweite aus den verbleibenden

$2n - 2$ Personen auf $\binom{2n-2}{2}$ Arten, ..., das letzte auf $\binom{2}{2} = 1$ Art. Da es auf die Reihenfolge

der Wahl der n Paare nicht ankommt ist das Produkt der Binomialkoeffizienten durch $n!$ zu dividieren:

$$\frac{1}{n!} \cdot \binom{2n}{2} \cdot \binom{2n-2}{2} \cdot \dots \cdot \binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{2} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{2n \cdot (2n-1)}{2} \cdot \frac{(2n-2) \cdot (2n-3)}{2} \cdot \dots \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2} = \frac{(2n)!}{n! \cdot 2^n}$$

Übungsaufgabe:

Welche der folgenden Binomialkoeffizienten sind durch 7 teilbar?

a) $\binom{200}{120}$ (ja) b) $\binom{1000}{200}$ (nein)