4.2 Permutationen mit Wiederholungen

Sind unter den n Elementen m_1 nicht unterscheidbar, so entstehen Permutationen mit Wiederholungen (ANANAS, MISSISSIPPI)

Beispiel:
Anzahl der Permutationen von AARAU n = 5, m_1 = 3

Der Platz des Buchstabens R kann auf 5 Arten, der von U auf 4 Arten bestimmt werden. Die restlichen Plätze werden mit A belegt. Damit gilt nach der Produktregel:

$$P_5(3) = 5\cdot 4 = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{5!}{3!}$$

Wir denken uns die unbekannte Anzahl x der Permutationen aufgeschrieben. In dieser Liste kommt z.B. auch UARAA vor. Machen wir die 3 Buchstaben A nachträglich unterscheidbar (z.B. durch einen Index), so entstehen aus UARAA 3! neue Permutationen. Auf diese Weise entstehen alle Permutationen von 5 Elementen ohne Wiederholungen, Damit gilt: $3!\cdot x = 5!$

oder $x = \frac{5!}{3!}$

Diese Überlegung führt im allgemeinen Fall auf:

$$P_n(m_1) = \frac{n!}{m_1!}$$

und schliesslich auf

Permutationen mit Wiederholungenm₁ Elementen der Sorte i

$$P_n(m_1, m_2, \ldots\ldots m_r) = \frac{n!}{m_1! m_2! \ldots\ldots m_r!} \qquad \textbf{(2)}$$

Beispiel:
Permutationen von MISSISSIPPI: $P_{11}(4,4,2)$ = 34'650

Beispiel: Lesewege:
Auf wieviele Arten kann man im folgenden Schema den Satz DER KLUGE REIST IM ZUGE lesen?

```
D E R K L U G E R E
E R K L U G E R E I
R K L U G E R E I S
K L U G E R E I S T
L U G E R E I S T I
U G E R E I S T I M
G E R E I S T I M Z
E R E I S T I M Z U
R E I S T I M Z U G
E I S T I M Z U G E
```

Lösungsidee:
Den 19 Buchstaben des Worts entsprechen 18 Wege (!), 9 mal rechts (R), 9 mal nach unten (U). Ein Leseweg kann also durch ein Wort mit 18 Buchstaben codiert werden z.B. **U**RRR**U**R**UU**RRR**UU**RRUUU.

Insgesamt sind es also $\frac{18!}{9!\cdot 9!}$ Lesewege.

Auch das folgende Zuteilungsproblem kann durch einen Code beschrieben werden:

Beispiel:
10 Schülerinnen bilden Arbeitsgruppen
zu 5 (Gruppe A) bzw. 2 (Gruppe B) bzw.3 (Gruppe C) Mitgliedern.
Wieviele Zuteilungen sind möglich?

Schülerinnen:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Arbeitsgruppe	B	A	A	C	A	A	B	C	A	C

Es gibt also $\frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 5!}$ verschiedene Zuteilungen.

Beispiel:
Zahlenlotto
Beim CH-Zahlenlotto sind aus 45 Zahlen 6 verschiedene auszuwählen.
Wieviele verschiedene Tipps sind möglich?

Auch hier führt die Idee des Codierens zur Lösung: Wir schreiben zu jeder der 45 Zahlen eine 1 falls die Zahl ausgewählt (angekreuzt) wird, andernfalls eine 0.

1	2	3	4	5	...	44	45
0	1	0	0	1		1	1

Es entsteht ein Code mit 45 Zeichen, 6 Einsen und 39 Nullen.
Es gibt also insgesamt

$\frac{45!}{6!\cdot 39!} = 8145060$ Tippmöglichkeiten.