5. geordnete Stichproben, Wörter, Variationen

Einführendes Beispiel zur Fragestellung:
Mit den n = 5 Buchstaben des Wortes BASEL werden Wörter der Länge k = 3 gebildet

ALS, LAB, BAL, SEL Wiederholungen nicht erlaubt, **Ziehen ohne Zurücklegen**.
ABB, LEE, LAA, LAS Wiederholungen zugelassen, **Ziehen mit Zurücklegen**.

Urnenmodell:
Aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln werden nacheinander k Kugeln gezogen. Wir sprechen von einer "geordneten k-Stichprobe vom Umfang k" (die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, wird berücksichtigt). Das Ergebnis kann in Form eines Worts der Länge k festgehalten werden, wobei das Alphabet aus n Schriftzeichen besteht.

5.1 geordnete k-Stichprobe mit Zurücklegen, Wörter der Länge k, Variationen mit Wiederholungen

Ziehen mit Zurücklegen bedeutet, dass eine Kugel - nachdem sie gezogen wurde - wieder zurückgelegt wird. Jede Kugel kann damit also mehrfach gezogen werden. Sind die Kugeln mit den Zeichen des Alphabets beschriftet, so entsteht ein Wort der Länge k. Wiederholungen von Buchstaben sind möglich.

Beispiel:
Mit den n = 5 Buchstaben des Wortes BASEL können 5^3 Wörter der Länge k = 3 gebildet werden.

Allgemein gilt: (3)
Mit einem Alphabet von n Buchstaben gibt es n^k Wörter der Länge k

Formulierungsvarianten:
Stehen für jeden der k Plätze genau n Elemente zur Verfügung, so gibt es n^k Möglichkeiten, die n Plätze zu belegen.

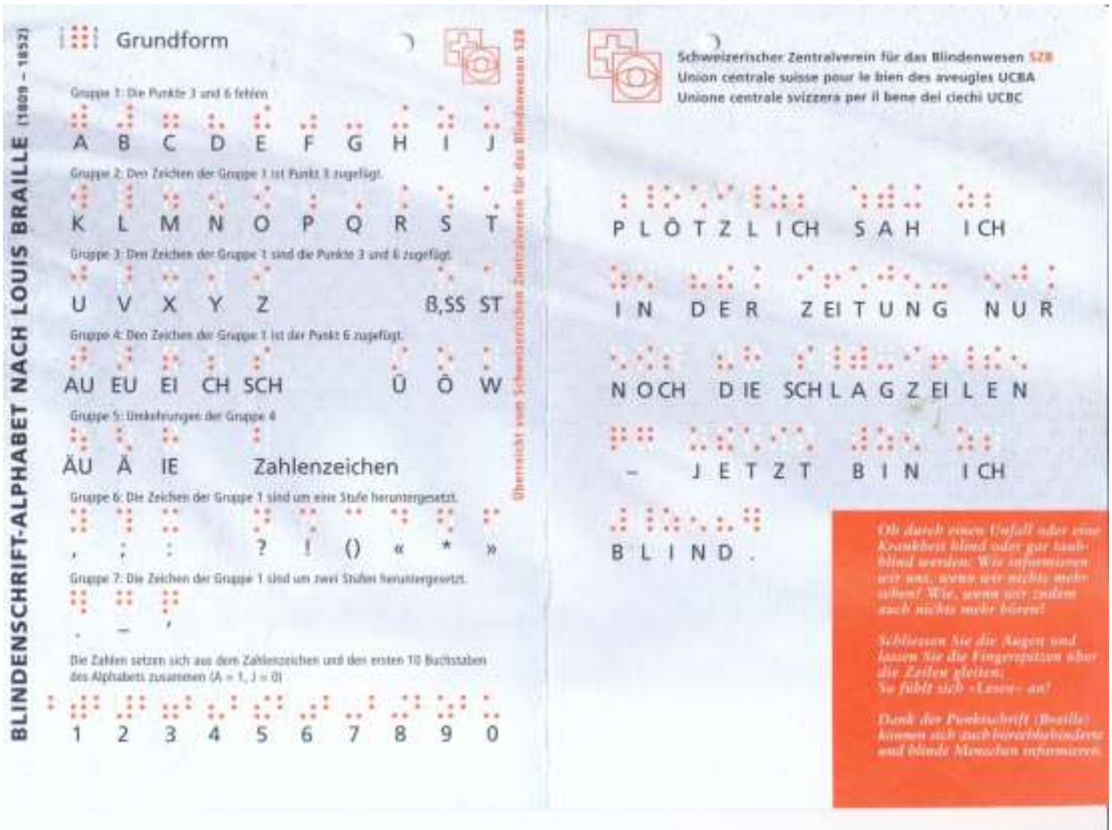
Anzahl Variationen von n Elementen zur k-ten Klasse
Statt von Wörtern der Länge k spricht man auch von Variationen von n Elementen zur k-ten Klasse. k-te Klasse bedeutet dabei, dass k Elemente ausgewählt werden.

Beispiele:

1.
Mit den **Ziffern** 1 bis 9 können 9^4 verschiedene vierstellige **Zahlen** gebildet werden.

2.
Beim **Fussballtoto** ist der Ausgang von 13 Spielen zu erraten, wobei für jedes Spiel 3 Ausgänge (1, x oder 2) möglich sind. Jede Tippkolonne besteht aus einer Folge mit 13 Zeichen aus einem Alphabet mit 3 Schriftzeichen, z.B. 1x221xxx1112x, es gibt also
3^{13} verschiedene Tippkolonnen.

3.
Louis **Braille** (1805 - 1852), der selbst mit 3 Jahren erblindete, entwickelte eine Blindenschrift. Jedem Buchstaben entspricht eine Anordnung von herausgehobenen Punkten auf einem Raster mit 6 Punkten, die der Blinde mit den Fingerspitzen der einen Hand abtastet (vgl. Beilage).
Insgesamt können 2^6 Zeichen dargestellt werden, denn jedes Zeichen kann durch einen sechsstelligen Code z.B. 010011 dargestellt werden (1 bedeutet Punkt herausgehoben, 0 nicht herausgehoben).



4.
Der sogenannte **ASCII**-Code (**A**merican **S**tandard **C**ode for **I**nformation **I**nterchange) besteht aus einer Folge von 8 Zeichen 0 oder 1. Mit 1 Byte bestehend aus 8 Bit können insgesamt 2^8 Zeichen dargestellt werden.

5. Mastermind

5.2 geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen, Variationen ohne Wiederholungen

Die gezogene Kugel wird nicht zurückgelegt bzw. die Wörter sind aus verschiedenen Zeichen zusammengesetzt.

Beispiel:
Mit den n = 5 Buchstaben des Wortes BASEL können 5·4·3 Wörter der Länge k = 3 gebildet werden, wenn Wiederholungen von Buchstaben nicht erlaubt sind. Nach der Produktregel gibt es für den 1. Buchstaben 5, anschliessend für den 2. je 4 und für den 3 noch 3 Möglichkeiten.
Das Ergebnis kann im Hinblick auf die Verallgemeinerung folgendermassen beschrieben werden:

$$5\cdot 4\cdot 3=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1}=\frac{5!}{2!}=\frac{5!}{(5-3)!}$$

Ist ein Alphabet von n Buchstaben gegeben, so gibt es (4)

(4) $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\dfrac{n!}{(n-k)!}$ **Wörter der Länge k**

Variationen ohne Wiederholungen mit n Elementen zur k-ten Klasse.

Beispiele:
1.
Mit den Ziffern 1 bis 9 können $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6=\dfrac{9!}{(9-4)!}$ vierstellige Zahlen mit verschiedenen Ziffern gebildet werden.

2.
Beim Pferdetoto sind die ersten 3 einlaufenden Pferde in der richtigen Reihenfolge vorauszusagen. Es gibt insgesamt 12·11·10 = $\dfrac{12!}{(12-3)!}$ verschiedene Möglichkeiten.

3.
Die 17 Studierenden der Klasse 3X können auf 24 Stühlen auf
$\dfrac{24!}{(24-17)!}$ Platz nehmen.

Im Unterschied zu den bisherigen vier Aufgaben ist bei der folgenden Aufgabe die Reihenfolge nicht wesentlich.