4. Permutationen

Jede Anordnung von n Elementen nennt man eine Permutation dieser Elemente (m.a.W. es sind n Plätze mit n Elementen zu belegen).

Sprachspielereien zur Einführung:

Bei den sogenannten Anagrammen werden die Buchstaben vertauscht.

Beispiele:
Anagramme von André Thomkins
(Hirnmondasket, Trinkmondhase, Denkharmonist, Normhandkiste)
(gesammelte Anagramme, Seedorn-Verlag, Zürich 1987)

weitermalen
nie malte wer
mental wie er
ei, wen malt er
malte er wien
malte er wein
mal wienerte
mal weinte er.

Im Herbst 1989 forderte die Basler Zeitung ihre Leserinnen auf, aus den 13 Buchstaben ihres Namens Anagramme zu bilden. Einige Beispiele:
single ZauBert, Bruet ganZ leis, reiZBelastung, trieB es Zu lang, Bestial grunZe.

Palindrome
Sätze, die vorwärts und rückwärts gelesen werden können, heissen Palindrome

RENTNER
SATOR AREPO TENET OPERA ROTAS
(aus dem 4. Jhdt. Sämann Arepo hält mit Mühe die Räder)

OTTO TENET MAPPAM, MADIDAM MAPPAM TENET OTTO

Adam zu Eva: MADAM I'M ADAM

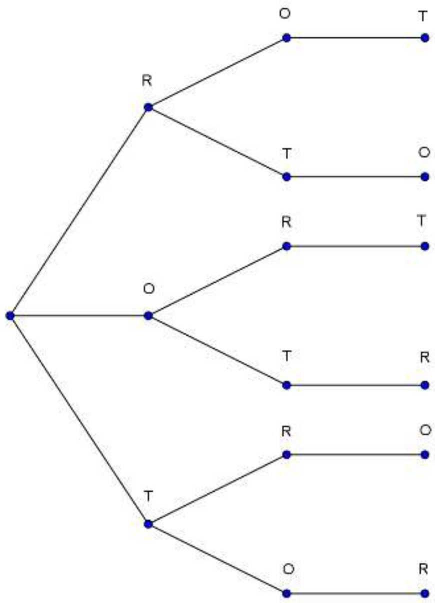
HOLT ASPIRIN ist ein Anagramm von Paris Hilton

DAS PAAR MELONEN ist ein Anagramm von Pamela Anderson

SPRICH BLECH OH TOR ist ein Anagramm von Christoph Blocher
(www.anagramme.20min.ch)

4.1 Permutationen ohne Wiederholungen

Beispiel:
Aus den Buchstaben T, O, R sind alle möglichen Wörter zu bilden, wenn jeder Buchstabe genau einmal vorkommen soll.



Für den ersten Buchstaben stehen 3 Möglichkeiten zur Verfügung, für den zweiten noch zwei und für den dritten bleibt nur noch eine Möglichkeit. Damit gibt es
$3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ Wörter (eher Buchstabenfolgen)

Bemerkung:
In der Stochastik wachsen die Bäume von links nach rechts bzw. von oben nach unten!

Allgemein gilt:

Anzahl der Permutationen von n Elementen

$$\mathbf{P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots\ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!} \qquad \mathbf{(1)}$$

n! (" n-Fakultät") ist also eine abkürzende Schreibweise für das Produkt der n ersten natürlichen Zahlen.

Beispiele:
$1! = 1$ $2! = 1 \cdot 2 = 2 \cdot 1! = 2$ $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2! = 6$ $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3! = 24$
$5! = 5 \cdot 4! = 120$ …

Rekursive Definition der Fakultäten:

$$\mathbf{(n+1)! = (n+1) \cdot n!}$$

Die Forderung, dass diese Rekursionsbeziehung auch für n = 0 gelten soll, führt auf die
Definition:
0! = 1

Beispiele:
1.
$$\frac{100!}{98!} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98!}{98!} = 100 \cdot 99$$
2.
$$\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n+1}{n!(n+1)} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}$$
3.
Die 12 Töne einer Halbtonleiter (Zwölftonmusik) kann man auf 12! Arten in einer Tonfolge anordnen, die jeden Ton genau einmal enthält.

4.
Bei einem Skirennen gibt es für die möglichen Startreihenfolgen der ersten 15 Fahrer 15! Möglichkeiten.

5.
Hat eine Klasse an einem Halbtag 5 verschiedene Fächer, so gibt es dazu 5! verschiedene Stundenpläne (theoretisch!).
6.
Das bekannte 15-er Puzzle (erfunden von Sam Loyld) besteht aus 15 gegeneinander verschiebbaren quadratischen Feldern, die mit den Zahlen 1 bis 15 beschriftet sind. Es sind 16! Ausgangsstellungen denkbar (tatsächlich kann nur die Hälfte davon in die natürliche Reihenfolge gebracht werden).

7.
Die 36 Karten eines Jass-Spiels können auf 36! gemischt werden.
8.
Schach: 8 Türme sollen so auf ein Schachbrett gestellt werden, dass sie sich gegenseitig nicht schlagen können.
Der Turm der 1. Reihe kann auf 8 Arten, der in der 2. noch auf 7 Arten positioniert werden. Insgesamt gibt es 8! Möglichkeiten.

9.
Permutationen lassen sich nummerieren, indem man die natürliche Reihenfolge zugrunde legt.

Gesucht ist die 7401. Permutation von ABEGILRS
Von den 8! = 40'320 Permutationen beginnen 7! = 5'040 mit A,
es verbleiben 2361, folglich beginnt das Wort mit B.

Mit BA beginnen	6! = 720	Rest: 1641	
Mit BE beginnen	6! = 720	Rest: 921	
Mit BG beginnen	6! = 720	Rest: 201	folglich beginnt das Wort mit BI
Mit BIA beginnen	5! = 120	Rest: 81	folglich beginnt das Wort mit BIE
Mit BIEA beginnen	4! = 24	Rest 57	

....
folglich heisst das Wort BIERGLAS
Die 8108. heisst BLEISARG, die 18817. GRASBEIL

Die Fakultäten wachsen sehr rasch. Angenommen ein PC zähle in 1 Sekunde bis zu 100 Millionen, dann braucht er für 10! 0.035 s, für 15! 3.6 Stunden, für 20! 771.5 Jahre, für 25! 4 918 572 000 Jahre.

Aufgabe:
Auf wieviele Arten können die 13 Schülerinnen und Schüler der Halbklasse 3X auf 13 Stühlen Platz nehmen?
13! = 6 227 020 800.
Dauert ein Platzwechsel eine Sekunde, so würde es ungefähr 200 Jahre dauern, bis alle Sitzordnungen eingenommen werden könnten.

In Formeln und Tafeln findet sich eine Näherungsformel für die Fakultäten:

Stirlingsche Näherung: $n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$

n	n!	Stirlings Näherung	relativer Fehler in %
10	3628800	3598696	0.83
20	2.433 E 18	2.423 E 18	0.42
50	3.041 E 64	3.036 E 64	0.17
100	9.333 E 157	9.325 E 157	0.09

Die abgebildete Zahl 304! hat 625 Ziffern und endet mit 74 Nullen. Dies kann direkt eingesehen werden. Die Anzahl der Nullen ist gleich der Anzahl der Faktoren 5 von 304! (denn die Anzahl der Faktoren 2 ist grösser). Da 60 Vielfache von 5, 12 Vielfache von 25 und 2 Vielfache von 125 kleiner als 304 sind, hat die Zahl 304!
60 + 12 + 2 = 74 Nullen.

Ergänzungen:

Versuchspläne:
Die 4 Schnupfen-Medikamente A,B,C,D sollen an Patienten verschiedenen Alters und Gewichts erprobt werden:

		Gewichtsgruppe			
		1	2	3	4
Altersgruppe	1	A	B	C	D
	2	B	A	D	C
	3	C	D	A	B
	4	D	C	B	A

Da kein Buchstabe mehrfach an derselben Stelle steht, wird in jeder Alters- bzw. Gewichtsgruppe jedes Medikament genau einmal abgegeben. Diese so genannten lateinischen Quadrate wurden zuerst von Ronald Fisher (1890 - 1962) zu statistischen Zwecken benutzt.

Als Gegenstück ein sogenanntes **Magisches Quadrat**, bei dem die Zahlen von 1 bis 16 so angeordnet sind, dass Zeilensumme, Spaltensumme und Summe der Diagonalen denselben Wert haben.
Kupferstich „Melencolia I" von Albrecht Dürer (1471 – 1528)

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Das folgende 3x3 magische Quadrat (grün) entsteht aus der ersten Figur, indem man die schwarzen Zahlen in Richtung des Zentrums 5 in die leeren Felder verschiebt.

		3						3		
	2		6				2		6	
1		5		9		1		5	1	9
	4		8				4		8	
		7						7		
		3						3		
	2		6				2	7	6	
1	9	5	1	9		1	9	5	1	9
	4		8				4	3	8	
		7						7		

Eulers Problem der vertauschten Liebesbriefe:
Auf wieviele Arten kann man n Briefe in n Umschläge so legen, dass kein Brief den richtigen Adressaten erreicht?

Explizit:
Für die Anzahl $P_0(n)$ der fixpunktfreien Permutationen gilt:

$$P_0(n) = n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$ Für grosse n gilt $P_0(n) \approx \frac{n!}{e}$

Rekursiv:

$$f_n = (n-1)\cdot(f_{n-1} + f_{n-2})$$