Kombinatorik

1. Einleitung

Die Kombinatorik ist ein Teilgebiet der finiten (endlichen, diskreten) Mathematik. Sie beschäftigt sich u.a. mit folgenden Problemen:

Abzählprobleme:
Gesucht ist die Anzahl der Möglichkeiten, gegebene Elemente nach bestimmten Bedingungen auszuwählen, anzuordnen (Anzahl Sitzordnungen, Zuteilung von Spielkarten, Zahlenlotto, Sudoku).

Optimierungsprobleme:
Kürzeste Wege (rasender Kaufmann, chinesischer Postmann), günstige Betriebsabläufe, Stundenpläne, Turnierpläne, Spielstrategien.

Existenzprobleme:
Vierfarbenproblem, Magische n-Ecke.

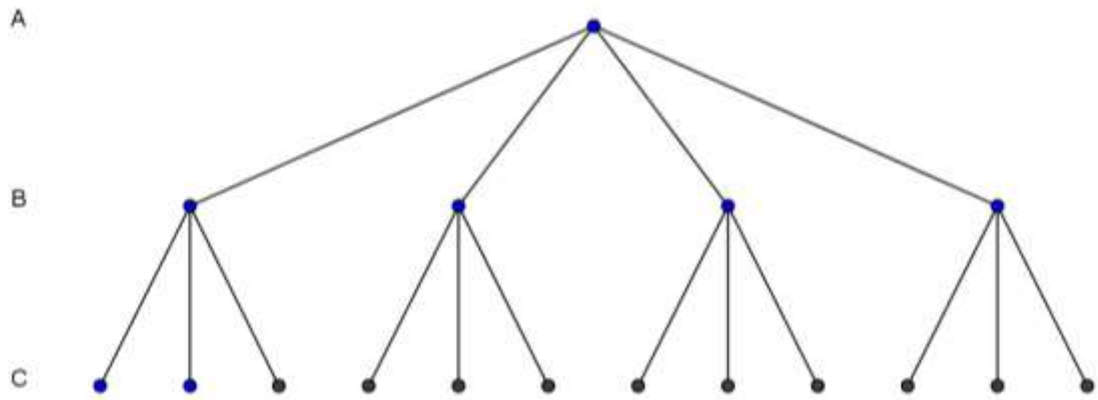
Viele Ideen basieren auf einem Vortrag von Piere Bolli an der ETHZ.

2. Produktregel

Einführendes Beispiel:
Wir nehmen an, dass von A-Dorf nach B-Dorf 4 Wege führen und von B-Dorf nach C-Dorf 3 Wege. Wieviele Wege führen dann von A-Dorf über B-Dorf nach C-Dorf?

Für jeden der $n_1 = 4$ Wege von A-Dorf nach B-Dorf gibt es **je** $n_2 = 3$ Wege von B-Dorf nach C-Dorf.
Damit führen $n_1\, n_2 = 4 \cdot 3$ Wege von A-Dorf nach C-Dorf.

Veranschaulichung in einem Baumdiagramm:



Allgemein gilt die so genannte:

> **Produktregel**:
> Kann ein 1. Teilproblem auf n_1 Arten, und anschliessend ein 2. Teilproblem auf n_2 Arten gelöst werden, dann gibt es $n_1 \cdot n_2$ Möglichkeiten das Gesamtproblem zu lösen.

Formulierungsvariante:
Sind A und B zwei Mengen mit n_1 bzw. n_2 Elementen, dann hat die Menge aller Zahlenpaare, d.h. das sogenannte kartesische Produkt $A \times B$ genau $n_1 \cdot n_2$ Elemente.

Bemerkung:
Die Produktregel gilt auch für k Teilprobleme .

Beispiele:

1.
Ein Fussballspiel endet 4:2. Wieviele Halbzeitresultate sind möglich?

1. Teilproblem: Wahl der Tore der Heimmannschaft: $n_1 = 5$ Möglichkeiten
2. Teilproblem: Wahl der Tore der Gastmannschaft: $n_2 = 3$ Möglichkeiten

Es gibt $5 \cdot 3$ mögliche Halbzeitresultate.

2.
Ein Restaurant bietet Menüs in 3 Gängen an, die man nach freier Wahl aus 2 Vorspeisen, 4 Hauptgängen und 3 Desserts zusammenstellen kann.

Offensichtlich gibt es $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ verschiedene Menüs.

3.
14 Spielerinnen nehmen an einem Schachturnier teil. Wie viele Partien für die 1. Runde sind mög1ich?

Für die erste Runde können $13 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 135135$ verschiedene Partien gebildet werden.

4.
Anzahl der Teiler einer gegebenen Zahl z.B. 2160.
Tipp: Zuerst mit einer kleineren Zahl z.B. 24 versuchen.
Zunächst kann die Zahl in Primfaktoren zerlegt werden: $z = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^1$.
Wahl des Exponenten von 2: $n_1 = 5$ Möglichkeiten (0 nicht vergessen)
Wahl des Exponenten von 3 : $n_2 = 4$ Möglichkeiten
Wahl des Exponenten von 5: $n_3 = 2$ Möglichkeiten
2160 hat also insgesamt $5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$ Teiler.

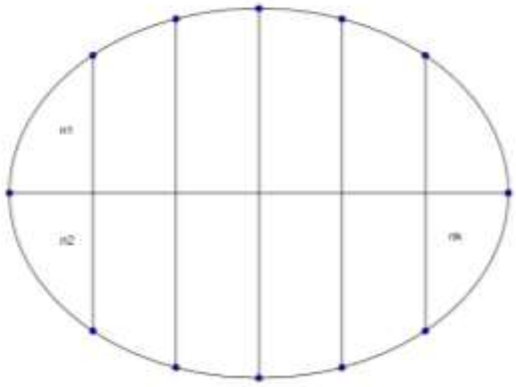
> Satz:
> Die Teilerzahl von z ist genau dann ungerade, wenn z eine Quadratzahl ist.

Beweis:
Ist z keine Quadratzahl, dann tritt mindestens ein ungerader Exponent auf, womit die Teilerzahl gerade ist.
Ist z eine Quadratzahl, dann hat jeder Teiler ausser die Wurzel einen Komplementärteiler.

3. Summenregel

Einführendes Beispiel:
Um die Anzahl der Schülerinnen der KSZ zu bestimmen, kann man
a) die Schülerinnen einzeln zählen oder
b) die Bestände aller Klassen bestimmen.
Dies führt auf die sogenannte

Summenregel:
Hat man für eine Entscheidung k Alternativen, die sich gegenseitig ausschliessen und gibt es für die 1. Alternative n_1, die 2. n_2, … und die k-te Alternative n_k Möglichkeiten, dann kann man sich insgesamt auf $n_1 + n_2 + ... + n_k$ Arten entscheiden.



Beispiel:
Auf wieviele Arten kann man aus 5 Franzosen, 10 Engländern und 6 Deutschen 2 Personen verschiedener Nationalität ausgewählt werden.

1. Alternative: Franzose und Engländer: $5 \cdot 10$ Möglichkeiten
2. Alternative: Franzose und Deutscher: $5 \cdot 6$ Möglichkeiten
3. Alternative: Engländer und Deutscher: $10 \cdot 6$ Möglichkeiten

Also insgesamt $5 \cdot 10 + 5 \cdot 6 + 10 \cdot 6 = 140$ Möglichkeiten

Wir besprechen im folgenden 5 Grundtypen von kombinatorischen Aufgaben:
Dabei spielen die folgenden Fragen eine Rolle:
- Wieviele Elemente sind vorhanden ?
- Wieviele Elemente werden ausgewählt (Umfang der Stichprobe) ?
- Darf ein Element mehrfach ausgewählt werden (Stichprobe mit oder ohne Zurücklegen) ?
- Spielt die Reihenfolge der Auswahl eine Rolle oder nicht (geordnete oder ungeordnete Stichprobe)?