033 Vierfeldertest

Frage:
Hilft eine Impfung gegen die Grippe?
Oder mit anderen Worten:
Sind die Ereignisse: I: Person ist geimpft und K: Person ist an Grippe erkrankt voneinander abhängig?
HA: Grippeimpfung und Grippeerkrankung sind voneinander abhängige Ereignisse
H0: Der Anteil der Erkrankten ist bei den geimpften und nicht Geimpften gleich gross

Gegeben sind die folgenden fiktiven Daten

Insgesamt wurden 800 Personen überwacht. Davon waren 228 geimpft, 572 nicht.

K: ist erkrankt

	K	$\bar{K}$		
I	$a = 10$	$b = 218$	$a + b = 228$	Anzahl Geimpfte
$\bar{I}$	$c = 55$	$d = 517$	$c + d = 572$	

$a + c = 65 \quad b + d = 735 \qquad a + b + c + d = n = 800$

Anzahl Erkrankte

Anteil der Geimpften: $g = \frac{a+b}{n} \approx 0. \approx 285$

Auf Grund der Randsummen können die erwarteten absoluten Zahlen bei Unabhängigkeit geschätzt werden. Der erwartete Wert A≈18.5 ergibt sich, indem man die Spaltensumme $a + c = 65$ mit dem Anteil der Geimpften g multipliziert oder allgemein

$$A = \frac{1}{n} \cdot (a + b)(a + c)$$

$$C = (a + c) - A = \left(1 - \frac{a + b}{n}\right) \cdot (a + c) = \frac{1}{n} \cdot (c + d) \cdot (a + c)$$

$$B = \frac{1}{n} \cdot (a + b)(b + d)$$

$$D0 = (b + d) - B = \left(1 - \frac{a + b}{n}\right) \cdot (b + d) = \frac{1}{n} \cdot (c + d) \cdot (b + d)$$

Damit kann die Grösse Chiquadrat berechnet werden:
Bezeichnet man die vier Abweichungsquadrate mit

$$U = \frac{(a-A)^2}{A} \approx 3.92$$
$$V = \frac{(b-B)^2}{B} \approx 0.35$$
$$W = \frac{(c-C)^2}{C} \approx 1.56$$
$$X = \frac{(d-D)^2}{D} \approx 0.14$$

so ergibt sich

$$Chi1 = U + V + W + X \approx 5.97$$

Diese Testgrösse kann, wie sich zeigen wird, auch direkt aus den vier Zahlen der Vierfeldertafeln berechnet werden. Dies bedingt allerdings umfangreiche Umformungen, die in verdankenswerterweise meine Mitarbeiterin Maple für mich durchgeführt hat.

Ausgangspunkt sind die bisherigen Darstellungen:

$$A = \frac{1}{n} \cdot (a+b)(a+c) \qquad (3)$$
$$B = \frac{1}{n} \cdot (a+b)(b+d) \qquad (7)$$
$$C = \frac{1}{n} \cdot (c+d) \cdot (a+c) \qquad (10)$$
$$D0 = \frac{1}{n} \cdot (c+d) \cdot (b+d) \qquad (15)$$

Sie werden eingesetzt in

$$A1 = \frac{(a-A)^2}{A} \qquad (4)$$
$$B1 = \frac{(b-B)^2}{B} \qquad (9)$$
$$C1 = \frac{(c-C)^2}{C} \qquad (13)$$
$$D1 = \frac{(d-D0)^2}{D} \qquad (19)$$

Vergleicht man mit CH1 so ergibt sich die behauptete Gleichheit

$$CH1 = CH2 = \frac{n \cdot (ad - bc)^2}{(a+c) \cdot (c+d) \cdot (a+b) \cdot (b+d)}$$

Details auf der folgenden Seite

Bei Vierfeldertafeln ist der Freiheitsgrad $df = 1$. Bei einem Signifikanzniveau von 5% erhält man mit einer Software oder mit einer Tabelle den kritischen Wert 3.84. Da der Wert der Testgrösse 5.97 grösser ist, kann man schliessen, dass die beiden Ereignisse voneinander abhängig sind. Die Grippeimpfung hat also einen Einfluss auf das Erkrankungsrisiko.

Maples Arbeit

$$A := \frac{(a+b)\cdot(a+c)}{a+b+c+d}$$

$$\frac{(a+b)\,(a+c)}{a+b+c+d} \tag{1}$$

$$a - A$$

$$a - \frac{(a+b)\,(a+c)}{a+b+c+d} \tag{2}$$

$$\overset{\text{factor}}{=}$$

$$\frac{a\,d - b\,c}{a+b+c+d} \tag{3}$$

$$\frac{\left(\frac{a\,d-b\,c}{a+b+c+d}\right)^2}{A}$$

$$\frac{(a\,d-b\,c)^2}{(a+b+c+d)\,(a+b)\,(a+c)} \tag{4}$$

$$A1 := \frac{(a\,d-b\,c)^2}{(a+b+c+d)\,(a+b)\,(a+c)}$$

$$B := \frac{(a+b)\cdot(b+d)}{a+b+c+d}$$

$$\frac{(a+b)\,(b+d)}{a+b+c+d}$$

$$b - B$$

$$b - \frac{(a+b)\,(b+d)}{a+b+c+d} \tag{6}$$

$$\xrightarrow{\text{normal b-(a+b)*(b+d)/(a+b+c+d)}}$$

$$-\frac{a\,d-b\,c}{a+b+c+d} \tag{7}$$

$$\frac{\left(-\frac{a\,d-b\,c}{a+b+c+d}\right)^2}{\frac{(a+b)\cdot(b+d)}{a+b+c+d}}$$

$$\frac{(a\,d-b\,c)^2}{(a+b+c+d)\,(a+b)\,(b+d)} \tag{8}$$

$$B1 := \frac{(a\,d-b\,c)^2}{(a+b+c+d)\,(a+b)\,(b+d)}$$

$$\frac{(a\,d-b\,c)^2}{(a+b+c+d)\,(a+b)\,(b+d)} \tag{9}$$

$$C := \frac{(c+d)\cdot(a+c)}{a+b+c+d}$$

$$\frac{(c+d)\,(a+c)}{a+b+c+d} \tag{10}$$

$$\xrightarrow{\text{evaluate at point}}$$

$$C - c$$

$$\frac{(c+d)\ (a+c)}{a+b+c+d}-c \qquad \mathbf{(11)}$$

$\overset{\text{factor}}{=}$

$$\frac{a\,d-b\,c}{a+b+c+d} \qquad \mathbf{(12)}$$

$$C1 := \frac{\left(-\frac{a\,d-b\,c}{a+b+c+d}\right)^2}{\frac{(c+d)\cdot(a+c)}{a+b+c+d}}$$

$$\frac{(a\,d-b\,c)^2}{(a+b+c+d)\ (c+d)\ (a+c)} \qquad \mathbf{(13)}$$

$D0 := c+d-C$

$$c+d-\frac{(c+d)\ (a+c)}{a+b+c+d}$$

$\overset{\text{factor}}{=}$

$$\frac{(c+d)\ (b+d)}{a+b+c+d} \qquad \mathbf{(15)}$$

$D0-d$

$$c-\frac{(c+d)\ (a+c)}{a+b+c+d} \qquad \mathbf{(16)}$$

$\overset{\text{factor}}{=}$

$$-\frac{a\,d-b\,c}{a+b+c+d} \qquad \mathbf{(17)}$$

$$\frac{\left(-\frac{a\,d-b\,c}{a+b+c+d}\right)^2}{\frac{(c+d)\cdot(b+d)}{a+b+c+d}}$$

$$\frac{(a\,d-b\,c)^2}{(a+b+c+d)\ (c+d)\ (b+d)} \qquad \mathbf{(18)}$$

$$D1 := \frac{(a\,d-b\,c)^2}{(a+b+c+d)\ (c+d)\ (b+d)}$$

$$\frac{(a\,d-b\,c)^2}{(a+b+c+d)\ (c+d)\ (b+d)} \qquad \mathbf{(19)}$$

$A1+B1+C1+D1$
$\overset{\text{factor}}{=}$

$$\frac{(a+b+c+d)\ (a\,d-b\,c)^2}{(c+d)\ (b+d)\ (a+b)\ (a+c)} \qquad \mathbf{(20)}$$

$$CH2 = \frac{n\cdot(a\,d-b\,c)^2}{(c+d)\ (b+d)\ (a+b)\ (a+c)}$$

$$CH2 = \frac{n\ (a\,d-b\,c)^2}{(c+d)\ (b+d)\ (a+b)\ (a+c)} \qquad \mathbf{(21)}$$