## 04. Axiomatischer Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung

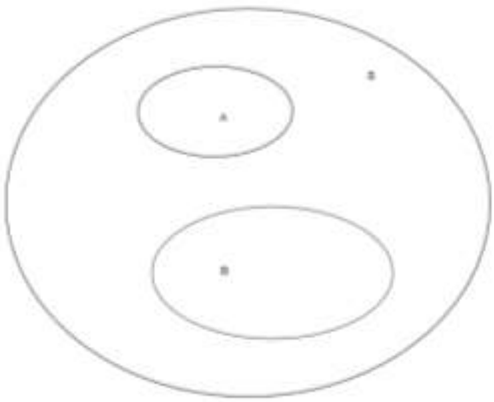
Die bisherigen Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechung wurden auf Grund von Plausibilitätsbetrachtungen eingeführt. Bei einem strengen Aufbau der Mathematik - wie es etwa die Mathematikergruppe Bourbaki unternommen hat - wird eine mathematische Theorie folgendermassen entwickelt:

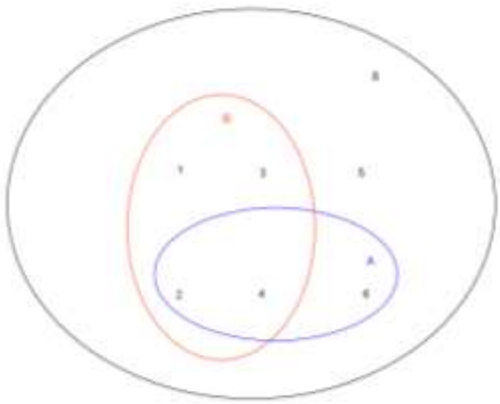
Beispiel der Elementargeometrie:
Ausgangspunkt sind Grundbegriffe (Punkt, Gerade, Ebene,...) und Relationen zwischen diesen Grundbegriffen ( .. liegt auf ... , ...). Die Grundbegriffe werden nicht näher definiert, denn dazu müssten andere Begriffe zugezogen werden. Für die Grundbegriffe trifft man unbeweisbare Grundannahmen, Axiome genannt ( zu zwei verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade). Eine mathematische Theorie (z.B. der Geometrie) besteht aus den Sätzen, die sich aus den Axiomen durch logisches Schliessen herleiten lassen.
Ein Axiomensystem (nach Peano) für die Menge der natürlichen Zahlen ist in Formeln und Tafeln zu finden.

Der russische Mathematiker **Kolmogoroff** hat 1933 die Wahrscheinlichkeitsrechnung axiomatisch aufgebaut:

Zu jedem **Zufallsexperiment** betrachten wir die Menge der möglichen Ergebnisse, den sogenannten **Stichprobenraum S**

Beispiel:
Werfen eines Würfels
$S = \{1,2,3,4,5,6\}$





Unter einem **Ereignis** verstehen wir eine Teilmenge von S.
spezielle Ereignisse
S das sichere Ereignis
$\varnothing = \{\}$ das unmögliche Ereignis

$A = \{2,4,6\}$ die Augenzahl ist gerade
$B = \{1,2,3,4\}$ die Augenzahl ist höchstens 4

die Augenzahl ist einstellig
die Augenzahl ist negativ

Endet die Durchführung eines Zufallsexperiments mit einem Ergebnis aus A, so sagt man, das Ereignis A ist eingetreten.

Ereignisse lassen sich verknüpfen
$A \cup B$ A oder B:
$A \cap B$ A und B:
Das Gegenereignis $\overline{A}$ von $A = S \setminus A$

$A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$ die Augenzahl ist nicht 5
$A \cap B = \{2,4\}$
$\overline{A} = \{1,3,5\}$ die AZ ist ungerade

**Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung nach Kolmogoroff**
(siehe auch Formeln und Tafeln).

A1: Die Ereignisse bilden eine endliche Ereignisalgebra.
A2: Jedem Ereignis A ist eine reelle Zahl p(A), seine Wahrscheinlichkeit zugeordnet.
A3: Die Wahrscheinlichkeit sind nichtnegativ
A4. Die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses S ist 1 d.h. p(S) = 1
A5: $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, sofern $A \cap B = \emptyset$)
d.h. A und B sind unvereinbar, schliessen sich gegenseitig aus.

A1 bedeutet, dass sich die Ereignisse verknüpfen lassen.
Für diese Verknüpfungen gelten die von der Mengenlehre her vertrauten Gesetze
z.B. de Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

zu A2: Die Wahrscheinlichkeiten können festgelegt werden durch
- Schätzung auf Grund eines Zufallsexperiments
- durch eine theoretische Annahme (z.B. Gleichwahrscheinlichkeit)
- durch subjektive Schätzungen

Die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse ist keine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung sondern der Statistik.

Weitere Beispiele von Stichprobenräumen:

1.
Werfen von zwei Würfeln: S = {11, 12, ....., 66}

2.
Aus einer Urne mit zwei weissen, zwei schwarzen und einer roten Kugel werden nacheinander
zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen
Stichprobenraum S S = {ww, ws, wr, ss, sw, sr, rw, rs}

3.
Beispiel zu A5:
Für das Auftreten von n-silbigen Wörtern in deutschsprachigen Texten gelten die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Silbenzahl | n | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Wahrscheinlichkeit | | 0.55 | 0.30 | 0.10 | 0.04 |

Für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wort ein- oder zweisilbig ist gilt: p = 0.55 + 0.30.
Die Voraussetzung ist, dass A und B keine gemeinsamen Elemente haben (A und B sind unvereinbar).

Aus diesem Axiomensystem ergeben sich Folgerungen wie :

F1: $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

F2: $p(\emptyset) = 0$

F3: $0 \leq p(A) \leq 1$

F4: $p(A) = \dfrac{g}{m}$

sofern die m möglichen Ergebnisse gleichwahrscheinlich und g für das Ereignis günstig sind.

F5: Verallgemeinerung von A5 auf n paarweise unvereinbare Ereignisse.

Beweis von F1.

$p(S) = p(A \cup \overline{A}) = p(A) + p(\overline{A}) = 1$ und damit F1.

**Vereinbare Ereignisse**

Frage: Wie lautet in diesem Fall die dem Axiom 5 entsprechende Aussage?

Vorbereitendes Beispiel: Fahrrad

H: Hinterradbremse funktioniert $p(H) = 0.95$

V: Vorderradbremse funktioniert $p(V) = 0.9$

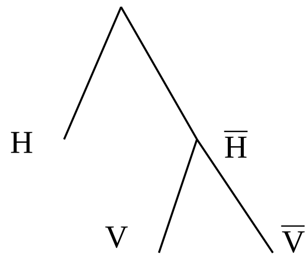
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dass gebremst werden kann d.h. wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der beiden Bremsen (Vorder- oder Hinterradbremse) funktioniert?

Lösung 1:

mit Baumdiagramm

$p(H \cup V) = 0.95 + 0.05 \cdot 0.9 = 0.995$

entweder funktioniert die Hinterradbremse oder die Hinterradbremse funktioniert nicht, aber die Vorderradbremse.




Lösung 2:

Das Gegenereignis von $H \cup V$: „mindestens eine Bremse funktioniert" lautet

$\overline{H \cup V} = \overline{H} \cap \overline{B}$ „keine der beiden Bremsen funktioniert"

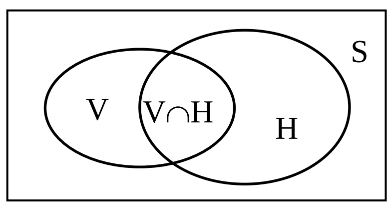
$p(H \cup V) = 1 - 0.05 \cdot 0.1 = 0.995$

Lösung 3:

$p(H \cap V) = p(H) + p(V) - p(H \cap V)$ mit

$p(H \cap V) = p(H) \cdot p(V)$ (*)

$= 0.95 + 0.9 - 0.95 \cdot 0.9 = 0.995$




Beachte:

(*) setzt voraus, dass V und H voneinander unabhängig sind.

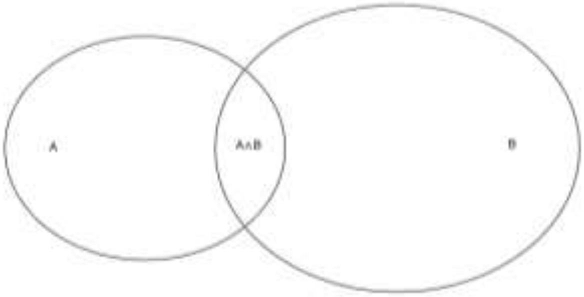
Allgemein gilt:

| | |
|---|---|
| F5: $\mathbf{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$ | Wahrscheinlichkeit, dass von zwei Ereig - nissen A und B mindestens eines eintrifft. |

Beweis:
Die Mengen $A \cap B$ bzw. $A \cap \overline{B}$ bzw. $\overline{A} \cap B$ sind paarweise unvereinbar, nach A5 gilt damit

$$p(A \cup B) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B}) + p(\overline{A} \cap B)$$
$$= p(A) + p(\overline{A} \cap B)$$

wegen $p(B) = p(\overline{A} \cap B) + p(A \cap B)$ gilt $p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B)$ woraus die Behauptung folgt.




Beispiel:
Aus der Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 100 wird eine Zahl zufällig gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass

- die gezogene Zahl durch 6 teilbar ist $p_1 = \frac{16}{100}$
- die gezogene Zahl durch 8 teilbar ist $p_2 = \frac{12}{100}$
- die gezogene Zahl durch 6 und 8 teilbar ist $p_3 = \frac{4}{100} \neq p_1 \cdot p_2$
- die gezogene Zahl durch 6 oder 8 teilbar ist $p_4 = p_1 + p_2 - p_3$

Bemerkung:
Die durch 6 <u>und</u> 8 teilbaren Zahlen sind die durch 24 teilbaren Zahlen.