4. Mehrstufige Zufallsversuche, Baumdiagramme

Der Ablauf eines mehrstufigen Zufallsversuchs kann in einem Baumdiagramm veranschaulicht werden.

Musteraufgabe:
Aus einer Urne mit verschiedenfarbigen Kugeln wird eine bestimmte Anzahl Kugeln gezogen. Dabei sind die Fälle Ziehen mit oder ohne Zurücklegen zu unterscheiden.

1. Fall: **Z**iehen **o**hne **Z**urücklegen (**ZoZ**)

Beispiel:
In einer Urne liegen 9 blaue und 7 rote Kugeln. Es werden nacheinander **ohne Zurücklegen** 2 Kugeln gezogen (Ziehen ohne Zurücklegen).

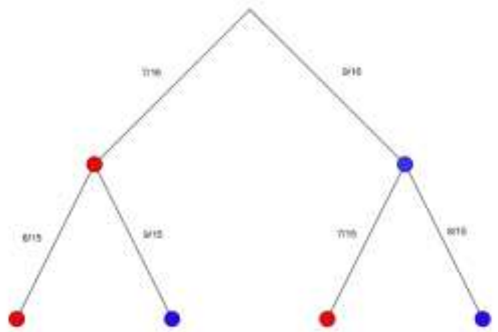
Ereignis **A: die gezogenen Kugeln sind blau**

Kombinatorische Lösung:

Aus den 16 Kugeln können auf $m = \binom{16}{2}$ Arten 2 Kugeln ausgewählt werden:

Aus den 9 blauen Kugeln können auf $g = \binom{9}{2}$ Arten 2 blaue Kugeln ausgewählt werden.

Damit gilt: $\mathrm{p(A)} = \dfrac{\binom{9}{2}}{\binom{16}{2}} = \dfrac{9 \cdot 8}{16 \cdot 15} = \dfrac{9}{16} \cdot \dfrac{8}{15}$



Der erste Faktor ist gleich der Wahrscheinlichkeit im ersten Zug eine blaue Kugel zu ziehen, der zweite Faktor ist gleich der Wahrscheinlichkeit im zweiten Zug erneut eine blaue Kugel zu ziehen. Dies führt zur Lösungsvariante mit einem Baumdiagramm.

Ereignis **B: eine blaue und eine rote Kugel ziehen:**

Kombinatorische Lösung:

$$\mathrm{p(B)} = \frac{\binom{9}{1}\binom{7}{1}}{\binom{16}{2}} = 2 \cdot \frac{9 \cdot 7}{16 \cdot 15} = 2 \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{7}{15}$$

Lösung mit Baumdiagramm

Für das Ereignis sind zwei Pfade günstig "zuerst eine blaue und dann eine rote" oder "zuerst eine rote und dann eine blaue"

Die Beispiele illustrieren folgende Regeln:

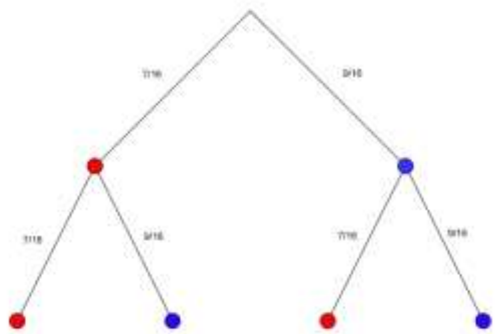
Multiplikationsregel:
Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs dieses Pfades.

Additionsregel:
Gehören zu einem Ereignis mehrere Pfade, so sind die zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten zu addieren.

Die Multiplikationsregel folgt später aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit. Die Additionsregel gilt, da die zu verschiedenen Ästen gehörenden Ereignisse unvereinbar sind.

2. Fall: **Ziehen mit Zurücklegen (ZmZ)**

Aus der Urne mit 9 blauen und 7 roten Kugeln werden nacheinander **mit Zurücklegen** 2 Kugeln gezogen.



Die Multiplikations- bzw. Additionsregel ergeben in diesem Fall die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

Ereignis A: die gezogenen Kugeln sind blau

$$p(A) = \frac{9}{16} \cdot \frac{8}{15}$$

Ereignis B: eine blaue und eine rote Kugel ziehen:

$$p(B) = 2 \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{7}{15}$$

Aufgabe:
In einer Urne sind schwarze, weisse und 5 rote Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit beim ersten Zug eine weisse zu ziehen ist $^{3}/_{7}$. Die Wahrscheinlichkeit beim Ziehen von zwei Kugeln zwei weisse zu ziehen ist $^{2}/_{11}$. Wie viele Kugeln von jeder Farbe befinden sich in der Urne?

Annahme: In der Urne befinden sich w weisse und s schwarze Kugeln.
Damit gilt folgendes Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{ll} \frac{w}{w+s} & = \frac{3}{7} \\ \frac{w}{w+s} \cdot \frac{w-1}{w+s-1} & = \frac{2}{11} \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{ll} \frac{w}{w+s} & = \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} \cdot \frac{w-1}{w+s-1} & = \frac{2}{11} \end{array} \right|$$

Der erste Faktor in der zweiten Gleichung kann durch $^{3}/_{7}$ ersetzt werden.

$$\left| \begin{array}{ll} 4w-3s & = 0 \\ 3 \cdot 11 \cdot (w-1) & = 2 \cdot 7 \cdot (w+s-1) \end{array} \right|$$ mit der Lösung w = 57 und s = 76

Lösung:
In der Urne befinden sich 57 weisse und 76 schwarze Kugeln

Nun werden aus den 9 weissen und 7 roten Kugeln 5 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

C: 5 weisse zu ziehen $$p(C)=\frac{\binom{9}{5}}{\binom{16}{5}}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}=\frac{9}{16}\cdot\frac{8}{15}\cdot\frac{7}{14}\cdot\frac{6}{13}\cdot\frac{5}{12}$$

D: 3 weisse und 2 rote zu ziehen

$$p(D)=\frac{\binom{9}{3}\cdot\binom{7}{2}}{\binom{16}{5}}=\frac{\frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}}{\frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}}=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{8}{15}\cdot\frac{7}{14}\cdot\frac{7}{13}\cdot\frac{6}{12}=\binom{5}{2}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{8}{15}\cdot\frac{7}{14}\cdot\frac{7}{13}\cdot\frac{6}{12}$$

Für das Ereignis sind $\binom{5}{2}$ Äste im Baumdiagramm günstig, denn die 3 weissen und 2 roten Kugeln können auf $\binom{5}{2}$ verschiedene Reihenfolgen gezogen werden.

Mit zunehmender Anzahl der gezogenen Kugeln wird die Lösung mit dem Baumdiagramm aufwändig. Die kombinatorische Lösung ist in diesem Fall einfacher. Die zugehörige Verteilung heisst:

Hypergeometrische Verteilung (Lottoformel)

Gegeben sind m Kugeln, davon r rote. Für die Wahrscheinlichkeit in n Ziehungen ohne Zurücklegen genau x rote Kugeln zu ziehen gilt:

$$P_n^*(x)=\frac{\binom{r}{x}\cdot\binom{m-r}{n-x}}{\binom{m}{n}}$$

Beispiel:
Beim Zahlenlotto sind aus 45 nummerierten Kugeln 6 auszuwählen. Die Wahrscheinlichkeiten für k richtige k = 0, 1, 2, ..., 6 ergeben sich zu

$$p_k=\frac{\binom{6}{k}\cdot\binom{39}{6-k}}{\binom{45}{6}}$$

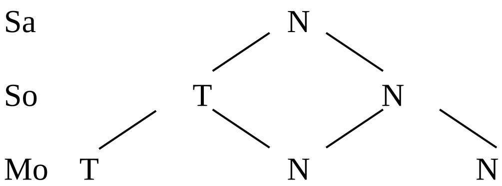
$$p_4=\frac{15\cdot 741}{8145060}\approx\frac{1}{733}\qquad p_3=\frac{182780}{8145060}\approx\frac{1}{44.6}\qquad p_2=\frac{1233765}{8145060}\approx\frac{1}{6.6}$$

$$p_1=\frac{3454542}{8145060}\approx\frac{1}{2.36}\qquad p_0=\frac{3262623}{8145060}\approx\frac{1}{2.5}$$

Bemerkung.:
Das entsprechende Problem beim Ziehen mit Zurücklegen führt auf die sogenannte **Binomialverteilung**, die später besprochen wird.

Ein einfaches Wettermodell als Beispiel eines sogenannten **Markovprozesses**:

Aufgabe:
Das Wetter an einem bestimmten Tag wird durch zwei Zustände T (trocken) bzw. N (nass) beschrieben. Für das Wetter des folgenden Tages sollen die folgenden Übergangswahrscheinlichkeiten gelten:
T $\to$ N: $\frac{1}{6}$ T $\to$ T: : $\frac{5}{6}$ N $\to$ T: : $\frac{1}{3}$ N $\to$ N: : $\frac{2}{3}$.
Heute ist Samstag und es ist nass. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für einen trockenen Montag.



p(Mo trocken) = $\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

Es handelt sich um ein einfaches Beispiel eines sogenannten Markovprozesses mit der

Übergangsmatrix $P=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} T \\ N \end{array} \\ T\,N & \end{array}$