5. Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die folgenden Beispiele zeigen, dass sich die Wahrscheinlichkeiten eines Zufallsexperiments ändern können, wenn die Bedingungen wechseln.

Beispiele:

Ziehen ohne Zurücklegen.
Da die Kugeln nach dem Ziehen nicht zurückgelegt werden, verändern sich die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Zug.

Alarmanlage
Tritt bei einer Sicherungsanlage ein Alarm auf, so vergrössert sich die Einbruchswahrscheinlichkeit.

Farbenblindheit
Die Wahrscheinlichkeit farbenblind zu sein vergrössert sich, sobald bekannt ist, dass die Testperson männlich ist.

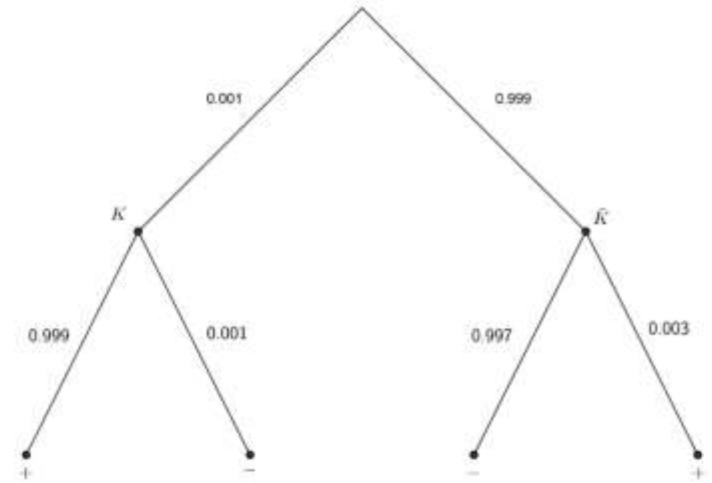
Die beiden folgenden Beispiele finden sich am Ende des Abschnitts:

Das Ziegenproblem

Landesweiter Aidstest?

Vorsorgeuntersuchungen
Die folgende Aufgabe geht der Frage nach, was es bedeutet, wenn eine Person einen „positiven" Befund erhält: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person wirklich krank ist?

Wir nehmen an, dass 0.1% der Bevölkerung eines Landes an einer bestimmten Krankheit K TB; HIV, Corona, …) leidet (**Prävalenz 0.1%)**. Das Testverfahren zum Nachweis der Infektion soll eine hohe Sicherheit haben, d.h. bei 99.9% der tatsächlich Infizierten erfolgt eine positive Testreaktion (**Sensitivität** 99.9%). Irrtümlich wird aber bei 0.3% der nicht-infizierten Testpersonen eine Infektion angezeigt (sogenannte **Spezifität**: 99.7%). Eine zufällig ausgewählte Person zeigt eine positive Testreaktion, d.h. wird als infiziert eingestuft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Person wirklich HIV-infiziert?



K: Testperson ist krank

$\overline{K}$: Testperson ist nicht krank

+: Testperson wird als krank eingestuft

−: Testperson wird als nicht krank eingestuft

Gemäss den Pfadregeln gilt dann für die Wahrscheinlichkeit, dass der Test positiv ausfällt, d.h. dass die Testperson als krank eingestuft wird:

$$p(+) = 0.001 \cdot 0.999 + 0.999 \cdot 0.003 \approx 0.4\%$$

Für die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer kranken Person der Test positiv ausfällt, gilt:

$$p(K \cap +) = 0.001 \cdot 0.999 \approx 0.1\%$$

Der Anteil der Kranken innerhalb der Testpositiven wird mit p(K/+) bezeichnet:

$$p(K/+) = \frac{p(K \cap +)}{p(+)} = 0.25$$

Obwohl also der Test recht zuverlässig ist, sind doch nur rund 25% der Personen mit positivem Befund wirklich krank.

Die im Beispiel gewählten Zahlen sind zwar fiktiv, aber das Fazit ist richtig. Dies wird im folgenden Artikel am Ende des Kapitels erläutert:
NZZ-Folio (April 99): Landesweiter Aidstest?

Würde der Test an 1 Million zufällig ausgewählten Personen durchgeführt, dann wären folgende Zahlen zu erwarten.

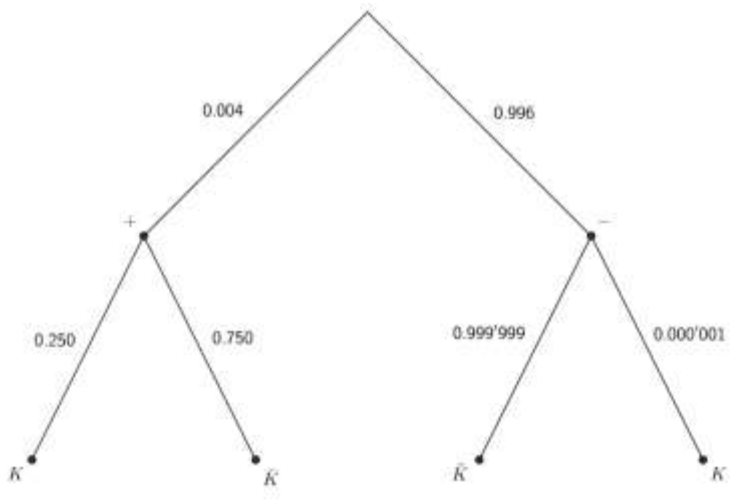
Test	positiv	negativ	Total
Infektion liegt vor	**999**	, 1	**1‘000**
Infektion liegt nicht vor	2‘997	**996‘003**	999‘000
gesamt	3‘996	996‘004	**1‘000‘000**

Von den insgesamt 999‘000 Nichtinfizierten werden 99,7% also $0.997 \cdot 999'000 \approx 996'003$ als negativ eingestuft. Mit den fett gedruckten Zahlen ergeben sich die übrigen aus den Randsummen.
In dieser sogenannten **Vierfeldertafel** ist zu erkennen, dass 999 von insgesamt 3‘996, also nur etwa 25% der als positiv getesteten Personen auch tatsächlich krank sind.

Die in der Vierfeldertafel dargestellten Ergebnisse können nun im sogenannten umgekehrten Baumdiagramm dargestellt werden.

1. Stufe Test positiv /negativ
2. Stufe Infektion liegt vor
   ja/nein

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine als krank eingestufte Person tatsächlich krank ist, beträgt
wie schon bekannt $\frac{999}{3996}$ also ungefähr 25%.

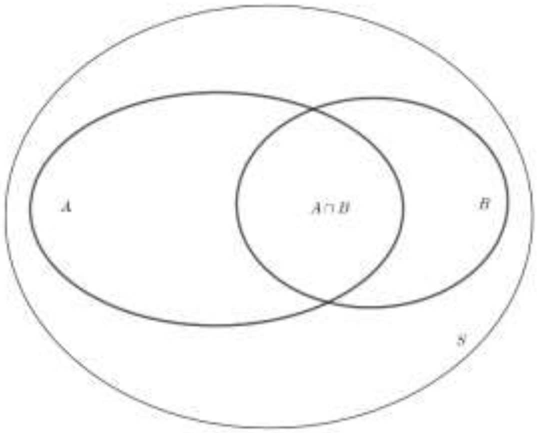


Allgemein gilt die folgende

Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \qquad p(A) \neq 0,$$

wobei A, B Ereignisse des Stichprobenraum S sind.



$p(B/A)$ ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von B unter der Voraussetzung, dass A schon eingetreten ist. Diese Wahrscheinlichkeit kann geometrisch als Flächenanteil von $A \cap B$ innerhalb A interpretiert werden.

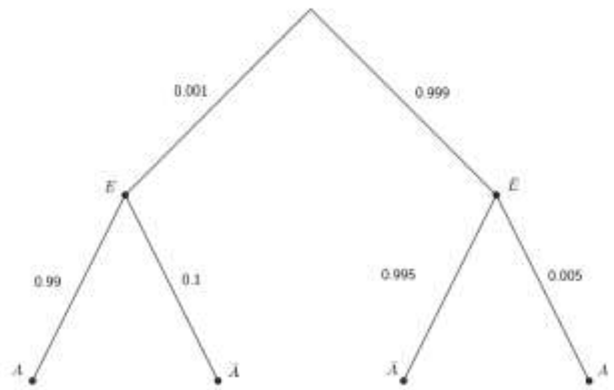
Beispiel: Die meisten Alarme sind Fehlalarme

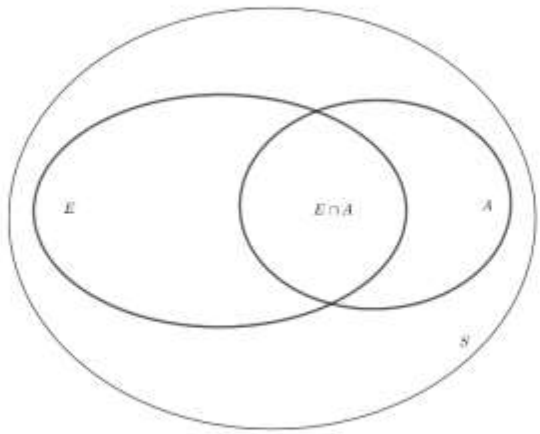
In einem Geschäft ist eine Alarmanlage eingerichtet. Wir betrachten folgende Ereignisse:

E: ein Einbruch findet statt   A: die Alarmanlage geht los

$p(A/E) = 0.99$	Findet ein Einbruch statt, so gibt die Anlage Alarm mit der Wahrscheinlichkeit 0.99
$p(A/\overline{\mathrm{E}}) = 0.005$	Obschon in einer bestimmten Nacht kein Einbruch stattfindet, so gibt die Anlage Alarm mit der Wahrscheinlichkeit 0.005 (Fehlalarm).
$p(E) = 0.001$	Wahrscheinlichkeit 0.001, dass in einer bestimmten Nacht ein Einbruch stattfindet.

Die Anlage hat gerade Alarm gegeben. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass gerade ein Einbruch im Gang ist?





$$p(E / A) = \frac{p(E \cap A)}{p(A)}$$

$p(E \cap A) = 0.001 \cdot 0.99 \approx 0.00099$

$p(A) = 0.001 \cdot 0.99 + 0.999 \cdot 0.005 \approx 0.11059$

$p(E/A) = \dfrac{990}{990 + 5 \cdot 999} = 16.8\ \%$

Im Schnitt sind also von 6 Alarmen 5 Fehlalarme.

Übungsaufgabe:
In einer Tierpopulation sind 45% männliche und 55% weibliche Tiere. Einige Tiere tragen das Merkmal A. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufälliges Tier das Merkmal A beträgt, ist 40%. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Männchen das Merkmal A nicht trägt, ist 30%. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit p, dass ein Weichen das Merkmal a trägt?

Lösung:
Anteil des Merkmals A:
$0.4 = 0.45 \cdot 0.7 + 0.55 \cdot p$ und daraus $p = \frac{0.085}{0.55} \approx 15.4\%$

Das Ziegenproblem:

Dem Kandidaten einer amerikanischen Fernsehshow stehen 3 Türen zur Auswahl. Hinter 2 Türen befindet sich eine Ziege und hinter einer ein Auto. Hat der Kandidat die Wahl einer Tür getroffen, so öffnet der Quizmaster eine der beiden anderen Türen, eine mit einer Ziege. Der Kandidat kann auf Grund dieser zusätzlichen Information die Tür noch wechseln oder bei seiner Wahl bleiben. Soll der Kandidat wechseln oder nicht?

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass sich das Auto hinter der linken Türe befindet.

- Wählt der Kandidat die mittlere Türe, so öffnet der Showmaster die rechte. Bei einem Wechsel gewinnt der Kandidat das Auto.
- Wählt der Kandidat die rechte Türe, so öffnet der Showmaster die mittlere. Bei einem Wechsel gewinnt der Kandidat ebenfalls das Auto.
- Wählt der Kandidat die linke Türe, so öffnet der Showmaster eine der beiden andern Türen. Bei einem Wechsel verliert der Kandidat.

Fazit:
Bei Spielbeginn sind die Gewinnchancen des Kandidaten $\frac{1}{3}$. Falls er die Türe wechselt kann er die Gewinnchance auf $\frac{2}{3}$ erhöhen.

Auszug aus Spiegel 34/91

Diese Streitfrage beschäftigt und entzweit seit Monaten die amerikanische Nation. Sie wurde in den Unterständen der US-Soldaten am Golf wie auf den Fluren des Geheimdienstes CIA, aber auch in den amerikanischen Eliteuniversitäten mit Leidenschaft diskutiert; auch deutsche Professoren ereifern sich mittlerweile in der Hamburger *Zeit* über Türen, Autos und Ziegen.

Der Zwist um die drei Türen wurde im September letzten Jahres angestoßen, als sich Marilyn vos Savant, 44, Verfasserin der Kolumne „Frag Marilyn" in der amerikanischen Illustrierten *Parade*, für die Wendevariante aussprach: Wechseln des Tür-Tips, erklärte sie, hilft.

Parade erreicht als Beilage von US-Sonntagszeitungen 70 Millionen amerikanische Zeitungsleser. Und Marilyn vos Savant ist nicht irgendeine Briefkastentante oder Klatschkolumnistin: Sie gilt mit ihrem Intelligenzquotienten von 228 Punkten, dem höchsten weltweit je ermittelten, als absolutes Superhirn.

Etwa 10 000 Zuschriften, schätzt Kolumnistin Marilyn, die mit dem Chirurgen und Kunstherzerfinder Robert Jarvik verheiratet ist, hat sie auf ihre *Parade*-Kolumne erhalten. Weitaus die meisten Briefeschreiber widersprachen. Zu den heftigsten Kritikern zählten Mathematiker und Wissenschaftler, für einige von ihnen war Kolumnistin Marilyn „selbst die Ziege".

Zahlen bitte

Landesweiter Aids-Test?

MAN HÖRT gelegentlich, vorsorgliche Untersuchungen sollten auf sämtliche für eine gewisse Krankheit in Frage kommenden Menschen ausgedehnt werden. So seien etwa alle Frauen regelmässig auf Brustkrebs zu untersuchen, oder alle sexuell aktiven Leute sollten sich einem Aids-Test unterziehen. Abgesehen von den horrenden Kosten spricht aber auch eine statistische Überlegung gegen so umfassende Abklärungen: Selbst kleinste Unsicherheiten im einzelnen Test können bei grossen Serien zu riesigen Fehlermengen führen.

Verlangt man beispielsweise von einem Aids-Test eine Sensitivität von 99,8 Prozent, bedeutet dies, dass der Test unter 1000 HIV-Infizierten 998 als solche erkennt. Und die Spezifität eines Tests sagt, wieviel gesunde Menschen er als gesund ausweist. Weist ein Aids-Test eine Spezifität von 99,2 Prozent auf, ergeben sich bei 1000 HIV-freien Untersuchten 992 richtige Resultate. Obwohl die Fehlerquote dieses Tests im Promille-Bereich liegt, würde eine breit angelegte Untersuchung zu einem Debakel führen.

In der Schweiz zählen etwa 4 Millionen zur Gruppe der sexuell Aktiven. Man schätzt, dass 0,4 Prozent von ihnen mit Aids-Viren angesteckt sind. Landesweit muss man also von 16 000 Infizierten ausgehen, die eine vorsorgliche Untersuchung ausfindig machen müsste. Bei einem Test mit der genannten Sensitivität und Spezifität käme folgendes heraus: Von den 16 000 Virusträgern würden 15 968 als positiv erkannt und 32 verfehlt. Für die Gruppe der 3 984 000 Nichtträger gäbe es 3 952 128 korrekte Negativresultate, aber 31 872 Personen erhielten vorerst den falschen, höchst unangenehmen Befund «HIV-positiv». Die insgesamt 47 840 Personen mit positivem Testergebnis müssten nun noch weitere, aufwendige Tests über sich ergehen lassen, bis die 33 Prozent tatsächlich Infizierten unter ihnen gefunden wären.

Deshalb sind landesweite Untersuchungen bei medizinischen Problemen, die nur einen kleinen Teil der Bevölkerung betreffen, aus statistischer Sicht ganz allgemein wenig sinnvoll. Mit der bestehenden Praxis, einen Test nur den Angehörigen einer Risikogruppe zu empfehlen, fährt man eindeutig besser.

(bc)