9. Berechnung der Binomialverteilung in Formeln und Tafeln oder mit dem TR

Das Lesen von Tabellen entfällt heute meistens, denn Taschenrechner liefern die einzelnen und die summierten Werte direkt. Die folgenden Beispiele können auch mit einem TR oder mit Excel gelöst werden.

Lösung mit einer Tabelle

Für gewisse Erfolgswahrscheinlichkeiten p und einige Werte von n ist die Binomialverteilung in Formelsammlungen tabelliert.
direkt.
In der Tabelle auf der nächsten Seite sind die Resultate der folgenden Beispiele markiert:

Beispiel:
In einer Urne sind 30 Kugeln, davon 6 rote. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit in 20 Ziehungen mit Zurücklegen
a) genau 3 rote b) (Tabelle summiert) höchstens 3 rote Kugeln zu ziehen.

a) $P_{20}(3) = \binom{20}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{17} \approx 0.205$

Berechnungen mit R;

Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$; $choose(n = 3, k = 2)$
Binomialverteilung:
$P_{20}(3) = \binom{20}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{17} \approx 0.205$
mit **R**
$dbinom(x = 3, size = 20, prob = \frac{1}{5})$

b)
$\sum_{k=0}^{3} P_{20}(k) = \sum_{k=0}^{3} \binom{20}{k} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{20-k} \approx 0.411$

mit **R**:
$pbinom(q = 3, size = 20, prob = 0.2)$

Gegenwahrscheinlichkeit:
$\approx 1 - 0.411$
$pbinom(q = 1, size = 20, prob = 0.2, lower.tail = FALSE))$

$P_n(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$, $n = 10, 15, 20$

x \ p	0.001	0.01	0.05	0.1	1/6	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	n−x
n = 10											
0	0.990	0.904	0.599	0.349	0.162	0.107	0.056	0.028	0.006	0.001	10
1	0.010	0.091	0.315	0.387	0.323	0.268	0.188	0.121	0.040	0.010	9
2	0.000	0.004	0.075	0.194	0.291	0.302	0.282	0.233	0.121	0.044	8
3	0.000	0.000	0.010	0.057	0.155	0.201	0.250	0.267	0.215	0.117	7
4	0.000	0.000	0.001	0.011	0.054	0.088	0.146	0.200	0.251	0.205	6
5	0.000	0.000	0.000	0.001	0.013	0.026	0.058	0.103	0.201	0.246	5
6	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.006	0.016	0.037	0.111	0.205	4
7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.003	0.009	0.042	0.117	3
8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.011	0.044	2
9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.010	1
10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0
n = 15											
0	0.985	0.860	0.463	0.206	0.065	0.035	0.013	0.005	0.000	0.000	15
1	0.015	0.130	0.366	0.343	0.195	0.132	0.067	0.031	0.005	0.000	14
2	0.000	0.009	0.135	0.267	0.273	0.231	0.156	0.092	0.022	0.003	13
3	0.000	0.000	0.031	0.129	0.236	0.250	0.225	0.170	0.063	0.014	12
4	0.000	0.000	0.005	0.043	0.142	0.188	0.225	0.219	0.127	0.042	11
5	0.000	0.000	0.001	0.010	0.062	0.103	0.165	0.206	0.186	0.092	10
6	0.000	0.000	0.000	0.002	0.021	0.043	0.092	0.147	0.207	0.153	9
7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.005	0.014	0.039	0.081	0.177	0.196	8
8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.003	0.013	0.035	0.118	0.196	7
9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.003	0.012	0.061	0.153	6
10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.003	0.024	0.092	5
11	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.007	0.042	4
12	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.014	3
13	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003	2
14	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1
15	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0
n = 20											
0	0.980	0.818	0.358	0.122	0.026	0.012	0.003	0.001	0.000	0.000	20
1	0.020	0.165	0.377	0.270	0.104	0.058	0.021	0.007	0.000	0.000	19
2	0.000	0.016	0.189	0.285	0.198	0.137	0.067	0.028	0.003	0.000	18
3	0.000	0.001	0.060	0.190	0.238	0.205	0.134	0.072	0.012	0.001	17
4	0.000	0.000	0.013	0.090	0.202	0.218	0.190	0.130	0.035	0.005	16
5	0.000	0.000	0.002	0.032	0.129	0.175	0.202	0.179	0.075	0.015	15
6	0.000	0.000	0.000	0.009	0.065	0.109	0.169	0.192	0.124	0.037	14
7	0.000	0.000	0.000	0.002	0.026	0.055	0.112	0.164	0.166	0.074	13
8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.008	0.022	0.061	0.114	0.180	0.120	12
9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.007	0.027	0.065	0.160	0.160	11
10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.010	0.031	0.117	0.176	10
11	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003	0.012	0.071	0.160	9
12	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.035	0.120	8
13	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.015	0.074	7
14	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.005	0.037	6
15	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.015	5
16	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.005	4
17	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	3
18	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	2
19	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1
20	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0
q	0.999	0.99	0.95	0.9	5/6	0.8	0.75	0.7	0.6	0.5	q

$\sum_{k=0}^{x} P_n(k)$, $n = 10, 15, 20$

x \ p	0.001	0.01	0.05	0.1	1/6	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	n−x
n = 10											
0	0.990	0.904	0.599	0.349	0.162	0.107	0.056	0.028	0.006	0.001	10
1	1.000	0.996	0.914	0.736	0.485	0.376	0.244	0.149	0.046	0.011	9
2	1.000	1.000	0.988	0.930	0.775	0.678	0.526	0.383	0.167	0.055	8
3	1.000	1.000	0.999	0.987	0.930	0.879	0.776	0.650	0.382	0.172	7
4	1.000	1.000	1.000	0.998	0.985	0.967	0.922	0.850	0.633	0.377	6
5	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.994	0.980	0.953	0.834	0.623	5
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.989	0.945	0.828	4
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.988	0.945	3
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.989	2
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	1
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0
n = 15											
0	0.985	0.860	0.463	0.206	0.065	0.035	0.013	0.005	0.000	0.000	15
1	1.000	0.990	0.829	0.549	0.260	0.167	0.080	0.035	0.005	0.000	14
2	1.000	1.000	0.964	0.816	0.532	0.398	0.236	0.127	0.027	0.004	13
3	1.000	1.000	0.995	0.944	0.768	0.648	0.461	0.297	0.091	0.018	12
4	1.000	1.000	0.999	0.987	0.910	0.836	0.686	0.515	0.217	0.059	11
5	1.000	1.000	1.000	0.998	0.973	0.939	0.852	0.722	0.403	0.151	10
6	1.000	1.000	1.000	1.000	0.993	0.982	0.943	0.869	0.610	0.304	9
7	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.983	0.950	0.787	0.500	8
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.985	0.905	0.696	7
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.966	0.849	6
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.991	0.941	5
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.982	4
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.996	3
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	2
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0
n = 20											
0	0.980	0.818	0.358	0.122	0.026	0.012	0.003	0.001	0.000	0.000	20
1	1.000	0.983	0.736	0.392	0.130	0.069	0.024	0.008	0.001	0.000	19
2	1.000	0.999	0.925	0.677	0.329	0.206	0.091	0.035	0.004	0.000	18
3	1.000	1.000	0.984	0.867	0.567	0.411	0.225	0.107	0.016	0.001	17
4	1.000	1.000	0.997	0.957	0.769	0.630	0.415	0.238	0.051	0.006	16
5	1.000	1.000	1.000	0.989	0.898	0.804	0.617	0.416	0.126	0.021	15
6	1.000	1.000	1.000	0.998	0.963	0.913	0.786	0.608	0.250	0.058	14
7	1.000	1.000	1.000	1.000	0.989	0.968	0.898	0.772	0.416	0.132	13
8	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.990	0.959	0.887	0.596	0.252	12
9	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.997	0.986	0.952	0.755	0.412	11
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.983	0.872	0.588	10
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.995	0.943	0.748	9
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.979	0.868	8
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.994	0.942	7
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.979	6
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.994	5
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	4
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	3
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	2
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0
q	0.999	0.99	0.95	0.9	5/6	0.8	0.75	0.7	0.6	0.5	q

Es folgen einige weitere Beispiele.

Tipp:
Zur Vermeidung von Ablesefehlern empfiehlt es sich, die Wahrscheinlichkeit, die kleiner oder gleich 0.5 ist, mit p zu bezeichnen.
:

Wahrscheinlichkeit mit einem Laplacewürfel in 20 Würfen genau 3 Sechser zu erzielen:

$p = {}^1/_6$	n = 20	x = 3	$\binom{20}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{17} \approx 23.8\%$
p = 0.3	n = 15	x = 5	20.6%
$p = {}^1/_6$	n = 20		Tabelle summiert
	x	$P_{20}(x)$	Σ
	0	0.026	0.026
	1	0.104	0.130 (höchstens ein Sechser)
	2	0.199	0.329 (höchstens zwei Sechser

weitere Beispiele zur Summentabelle
Wahrscheinlichkeit mit einem Laplacewürfel in 20 Würfen

A: höchstens 4 Sechser werfen $P_{20}(X \le 4) = 0.729$

B: mindestens 5 Sechser (Gegenereignis von A) $P_{20}(X \ge 5) = 1 - P_{20}(X \le 4) = 0.271$

C: mindestens 3 und höchstens 6 Sechser $P_{20}(3 \le X \le 6)$
$= P_{20}(X \le 6) - P_{20}(X \le 2) = 0.634$

Aufgabe:
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Massenartikel zum Ausschuss gehört, sei 0.05. Es wird eine Stichprobe von 10 Stück (mit Zurücklegen) gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich darunter

kein defektes Stück befindet
(alle Stücke in Ordnung sind) $P_{10}(X = 0) = 59.9\%$

genau ein defektes Stück befindet (9 Stücke i.O.) $P_{10}(X = 1) = 31.1\%$

höchstens ein defektes Stück befindet $P_{10}(X \le 1) = 91.4\%$

mindestens ein defektes Stück befindet $P_{10}(X \ge 1) = 1 - P_{10}(X = 0) = 40.1\%$
(höchstens 9 i.O.)

höchstens zwei defekte Stücke befinden $P_{10}(X \le 2) = 98.9\%$

In der Praxis verwendet man auch häufig Näherungsverteilungen z.B: die Normalverteilung oder die Poissonverteilung.