02 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Einleitung

Auch das Unwahrscheinliche ist äusserst wahrscheinlich“ (Aristoteles (384 – 322 v. Chr.)

„ Die Wahrscheinlichkeit ist nämlich ein Grad der Gewissheit und unterscheidet sich von ihr wie ein Teil vom Ganzen“.
(Jakob Bernoulli (1654-1705) in seiner Ars conjectandi (Vermutungskunst)).

„Das Wort Zufall ist Gotteslästerung“. (Lessing ?)

„Zufall ist vielleicht das Pseudonym Gottes, wenn er nicht selbst unterschreiben will“
(Anatole France)

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist zusammen mit der Statistik ein Teilgebiet der Stochastik (griech. stochos aufgestelltes Ziel, das Zielen, Vermuten, davon abgeleitet stochasmos Vermutung). Die Stochastik ist für viele Wissenschaftszweige z.B. in der Biologie (**Hardy -Weinberg-Gesetz** in der Vererbungslehre) und in den Sozialwissenschaften (Psychologie, Versicherungen, Finanzmarkttheorie) ein wichtiges Hilfsmittel. Auch in unserem Alltag schliessen wir bewusst oder unbewusst Wetten über wahrscheinliche Ereignisse ab. Mehr als in anderen Bereichen der Mathematik wimmelt es in der Stochastik von Ergebnissen, die der Intuition zuwiderlaufen.
u

Sichere Ereignisse: Ist eine Gesamtheit von Bedingungen erfüllt, so muss ein bestimmtes Ergebnis eintreten.

Beispiele:

Fallgesetz:	$s = \frac{1}{2}gt^2$
Ohmsches Gesetz:	$R = \frac{U}{I}$
chemische Reaktion:	Mg + O = MgO

Zufallsexperimente: Ein bestimmtes Ereignis kann eintreten , muss aber nicht.

Beispiele:
Wird ein Kind geboren, so kann es ein Mädchen oder ein Knabe sein.

Radioaktiver Zerfall: Ein bestimmtes Radon-Atom kann im Verlaufe von t Jahren zerfallen oder nicht. Nach 1600 Jahren sind 50% der Atome zerfallen.

Eine bestimmte Frau kann rotgrün-blind sein oder nicht.

Mendelsche Vererbungsgesetze (1886): Die Japanische Wunderblume (Mirabilis Jalappa) blüht rot oder weiss. Kreuzt man rote und weisse Wunderblumen, so entsteht eine rosa blühende Generation. Kreuzt man diese unter sich, so kann eine daraus hervorgegangene Pflanze rot, rosa oder weiss blühen (Verhältnis 1:2:1)

Zahlenlotto 6 aus 45: Ein Lottospieler kann bei einer Ziehung gewinnen oder nicht.

Die Länge eines zufällig ausgewählten Massenartikels schwankt mehr oder weniger um einen Sollwert.

In einer Umfrage vor einer Abstimmung kann eine bestimmte Person zu der Stichprobe gehören oder nicht.

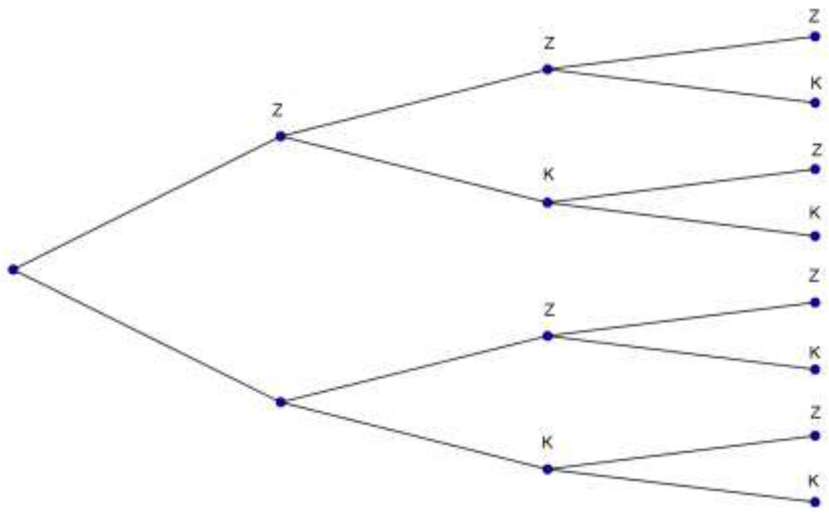
Eine zufällig ausgewählte Glühbirne erfüllt die Qualitätsanforderung oder nicht.

Allgemein:

Bei **Zufallsexperimenten** sind mehrere Ergebnisse möglich. Die möglichen Ergebnisse eines Zufallsversuchs werden zum sogenannten Stichprobenraum S (Ergebnismenge) zusammengefasst

Beispiele:
Würfeln: S = {1,2,3,4,5,6}
eine Münze wird dreimal geworfen: S = {ZZZ, ZZK,ZKZ,ZKK,KZZ.KZK.KKZ,KKK}

Baumdiagramm:



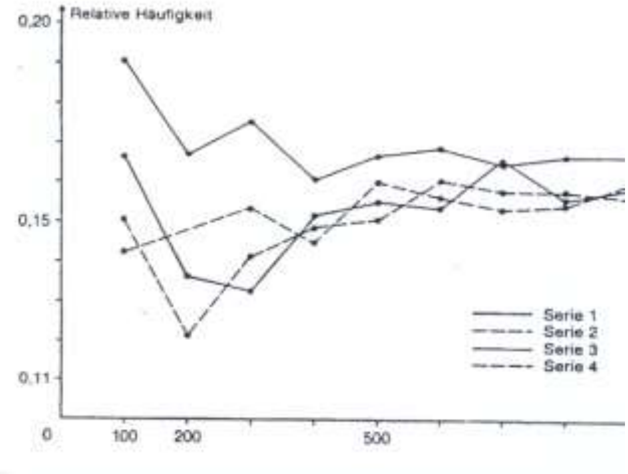
1 Empirisches Gesetz der grossen Zahlen.

Die folgenden Beispiele illustrieren das sogenannte empirische Gesetz der grossen Zahlen:

Nach einer hinreichend grossen Anzahl n von Wiederholungen eines Zufallsexperiments schwankt die relative Häufigkeit eines Ereignisses A im Allgemeinen unwesentlich um einen festen Wert. Diesen Wert nennt man die Wahrscheinlichkeit p(A) des Ereignisses A.

Beispiele:
Werfen eines Würfels (hist. Astragalus)

Mit einem Würfel wurden 4 Serien zu 1000 Würfen geworfen, wobei nach jeweils 100 Würfen die relative Häufigkeit für das Auftreten der Augenzahl 6 bestimmt wurde. Die Abbildung zeigt, dass sich mit fortlaufender Versuchszahl die relativen Häufigkeiten stabilisieren.



Experiment des Zürcher Astronoms R. Wolf
(1882)

	1	2	3	4	5	6	total
abs. H.	3407	3631	3176	2916	3448	3422	20000
rel. H.	17.0%	18.2%	15.9%	14.6%	17.2%	17.1%	100.0%

Langzeitversuch seit 1987 an der KSZ
(wuerfex.xls)

	1	2	3	4	5	6	total
abs H..	1659	1608	1710	1498	1557	1561	9593
rel.H.	17.3%	16.8%	17.8%	15.6%	16.2%	16.3%	100.0%

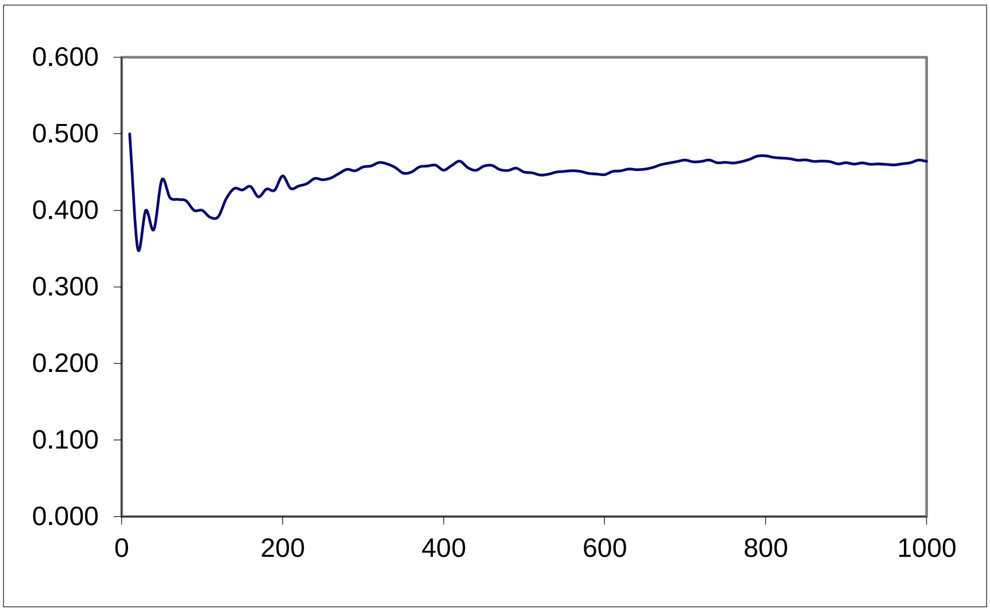
Werfen einer Münze

Historische Experimente

	Anzahl Würfe n	abs. H.	rel. H.
G.L. Buffon (1707-1788) franz. Naturforscher	4040	2048	0.5069
K. Pearson (1857-1936) engl. Statistiker	24'000	12012	0.5005

Werfen eines Reisnagels

In einem Klassenexperiment (2.9.2005) wird die relative Häufigkeit beobachtet, mit der ein Reisnagel auf die Spitze fällt.



In 1000 Würfen fiel der Reisnagel 464 mal auf die Spitze.

Im Langzeitversuch (seit 1984) fiel in insgesamt 21430 Würfen der Reisnagel 9832 mal auf die Spitze, die relative Häufigkeit beträgt damit 0.462. Die regelmässig erhobenen relativen Häufigkeiten des Gesamtversuchs schwankten in diesen 20 Jahren zwischen 0.449 und 0.466

Geburtenstatistik

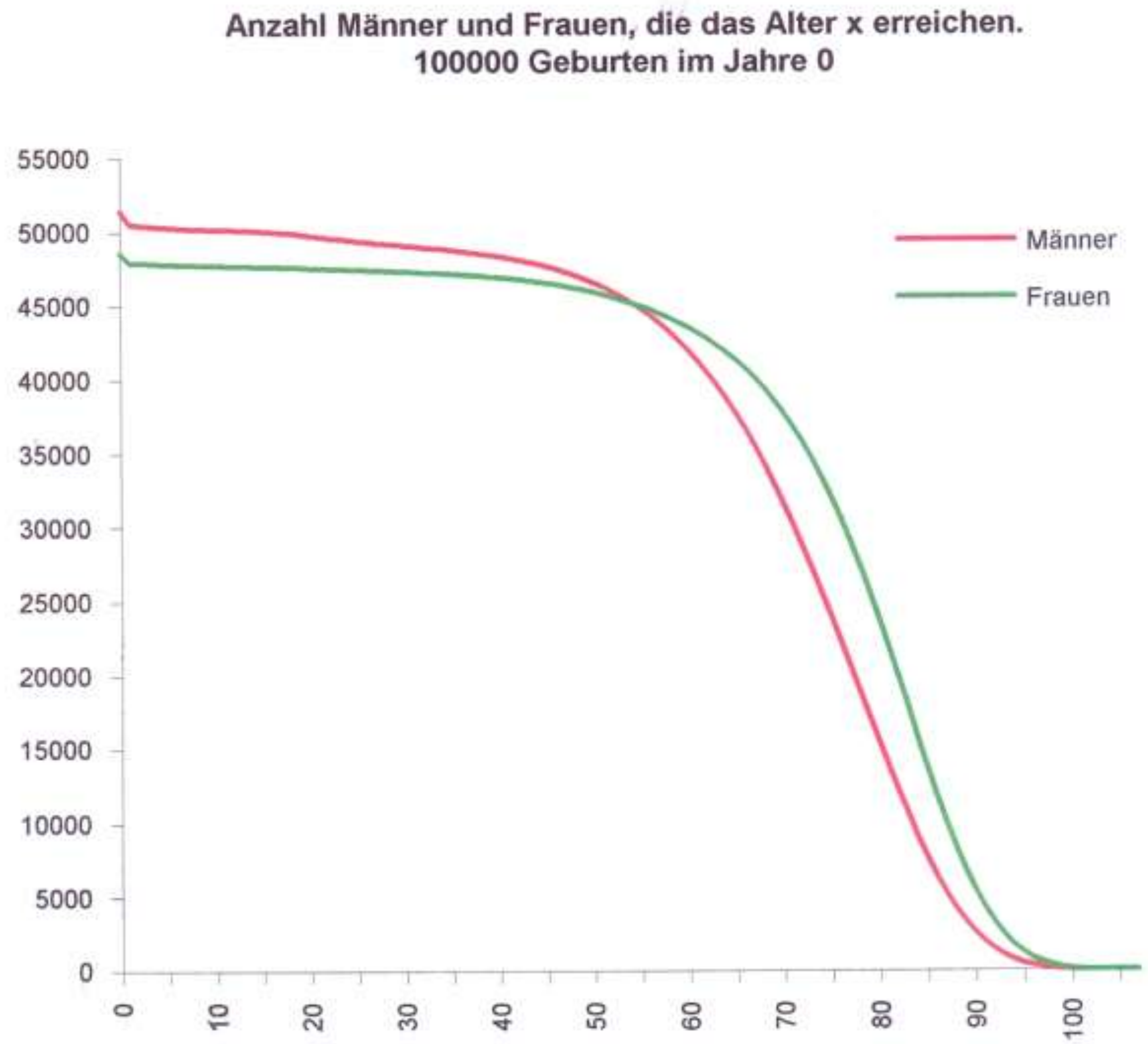
In der Schweiz wurden zwischen 1871 und 1900 1359671 Knaben bzw. 1285086 Mädchen geboren. Die relative Häufigkeit für eine Knabengeburt beträgt damit 51.41%

Die Stabilisierung der relativen Häufigkeit kann deutlich bei den fast 11 Millionen Geburten der Jahre 1961-1971 in der BRD beobachtet werden (siehe Tabelle). Die relative Häufigkeit stabilisiert sich offensichtlich um einen Wert von 0.514 (dieser Wert ist u.a. von den Lebensumständen abhängig, unmittelbar nach dem 2.Weltkrieg lag er bei 0.52).

Jahr	Anzahl Geburten	total	männlich	total	rel. H.
1961	1012687	1012687	520590	520590	0.5141
1962	1018552	2031239	523801	1044391	0.5142
1963	1054123	3085362	541812	1586203	0.5141
1964	1065437	4150799	547979	2134182	0.5142
1965	1044328	5195127	536930	2671112	0.5142
1966	1050345	6245472	539492	3210604	0.5141
1967	1019459	7264931	523634	3734238	0.5140
1968	969825	8234756	498202	4232440	0.5140
1969	903456	9138212	464430	4696870	0.5140
1970	810808	9949020	416321	5113191	0.5139
1971	778526	10727546	400426	5513617	0.5140

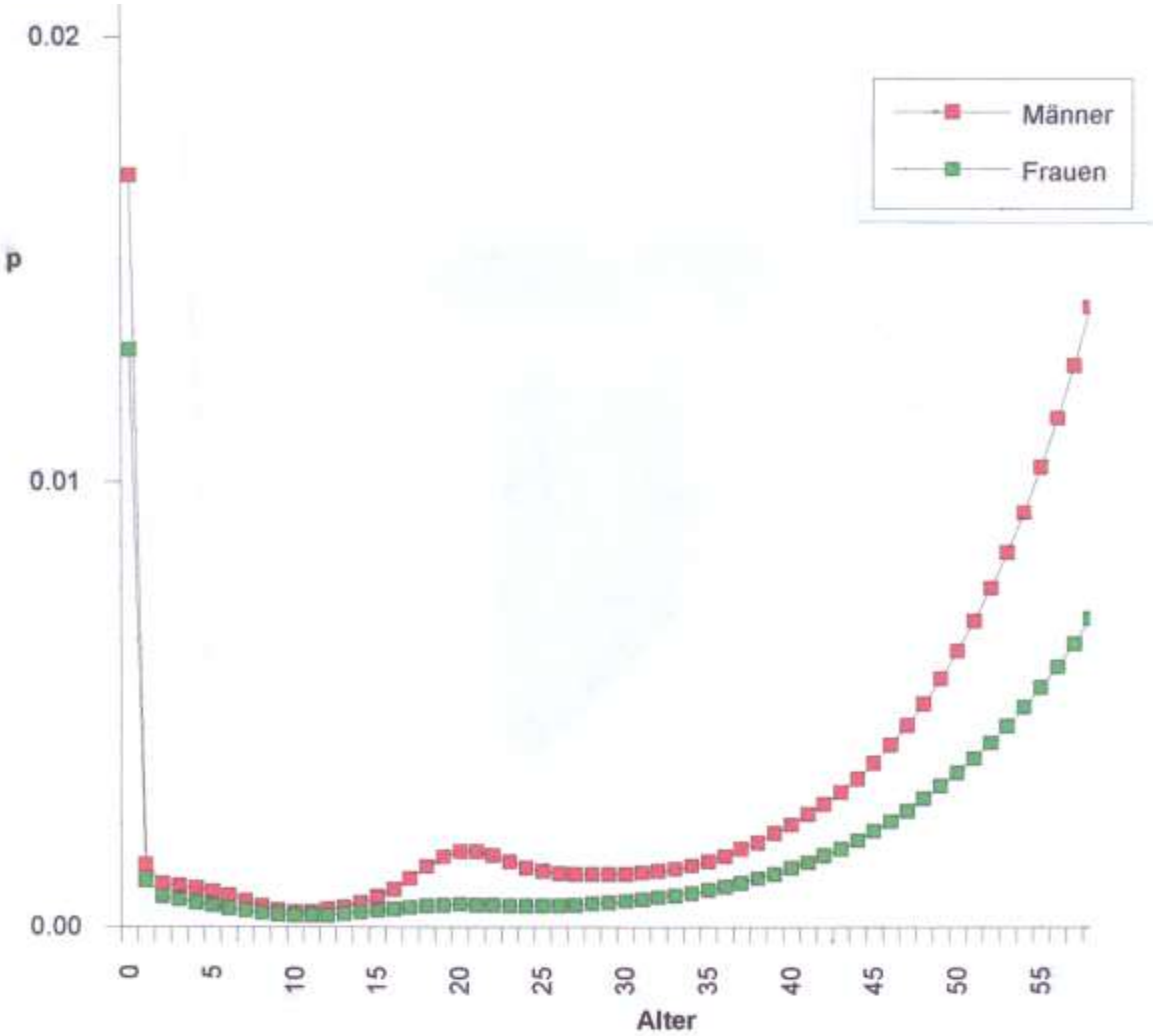
Lebensversicherung (ac)

• Anzahl Männer und Frauen, die das Alter x erreichen (100 000 Geburten im Jahre 0)



Lebensversicherung (ac)

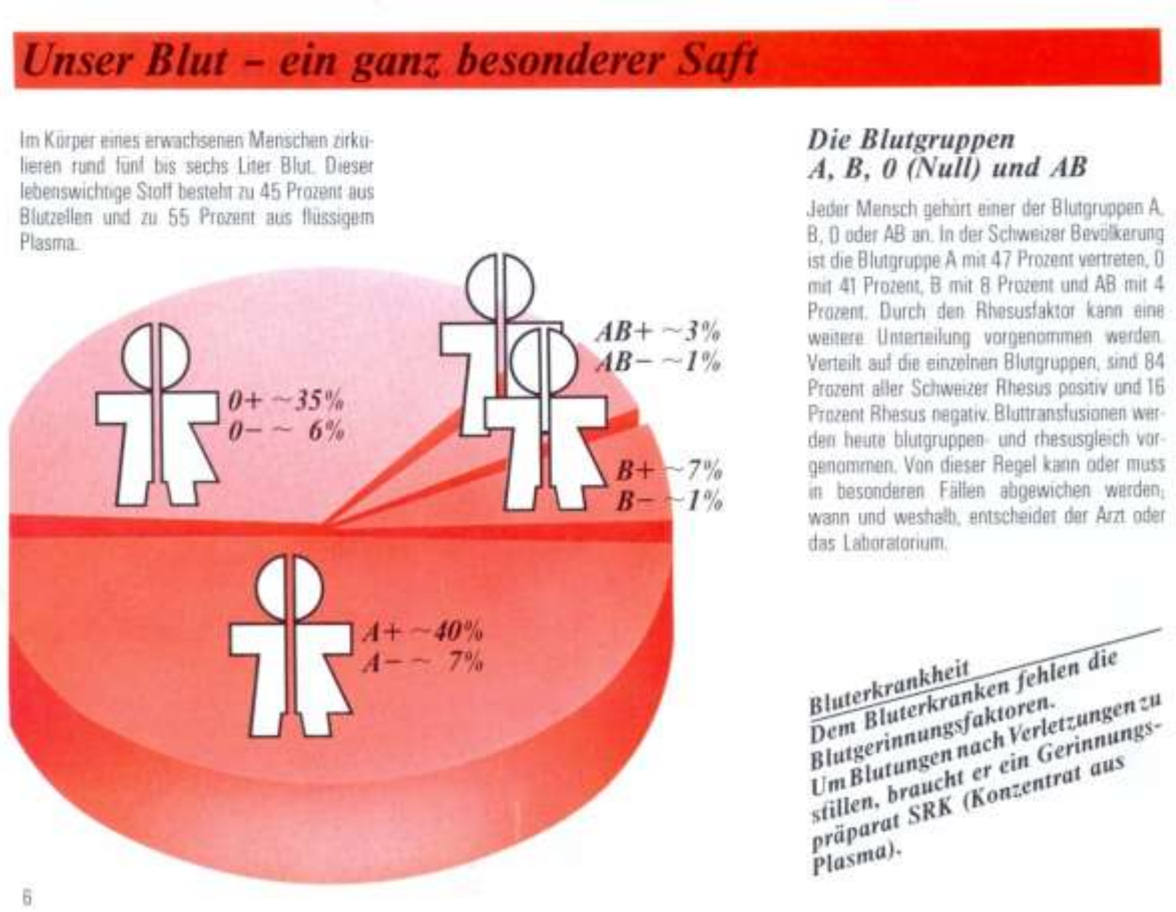
• Wahrscheinlichkeit, dass eine x-jährige Person zwischen dem Alter x und x + 1 stirbt



Auffallend ist insbesondere das Altersintervall 15- 30.

Blutgruppen

CH (Quelle: Blutspendedienst)
47% Blutgruppe A, 41% Blutgruppe 0, 8% Blutgruppe B, 4% Blutgruppe AB
84% Rhesus positiv, 16% Rhesus negativ



Unser Blut – ein ganz besonderer Saft

Im Körper eines erwachsenen Menschen zirkulieren rund fünf bis sechs Liter Blut. Dieser lebenswichtige Stoff besteht zu 45 Prozent aus Blutzellen und zu 55 Prozent aus flüssigem Plasma.

Die Blutgruppen A, B, 0 (Null) und AB

Jeder Mensch gehört einer der Blutgruppen A, B, 0 oder AB an. In der Schweizer Bevölkerung ist die Blutgruppe A mit 47 Prozent vertreten, 0 mit 41 Prozent, B mit 8 Prozent und AB mit 4 Prozent. Durch den Rhesusfaktor kann eine weitere Unterteilung vorgenommen werden. Verteilt auf die einzelnen Blutgruppen, sind 84 Prozent aller Schweizer Rhesus positiv und 16 Prozent Rhesus negativ. Bluttransfusionen werden heute blutgruppen- und rhesusgleich vorgenommen. Von dieser Regel kann oder muss in besonderen Fällen abgewichen werden; wann und weshalb, entscheidet der Arzt oder das Laboratorium.

Bluterkrankheit
Dem Bluterkranken fehlen die Blutgerinnungsfaktoren. Um Blutungen nach Verletzungen zu stillen, braucht er ein Gerinnungspräparat SRK (Konzentrat aus Plasma).

6

Rotgrün- Blindheit

rotgrünblinde Frauen 0.4%, rotgrünblinde Männer 8%.

Relative Häufigkeit der einzelnen Buchstaben in der deutschen Schriftsprache

Tabelle

E	17,40	M	2,53
N	9,78	O	2,51
I	7,55	B	1,89
S	7,27	W	1,89
R	7,00	F	1,66
A	6,51	K	1,21
T	6,15	Z	1,13
D	5,08	P	0,79
H	4,76	V	0,67
U	4,35	J	0,27
L	3,44	Y	0,04
C	3,06	X	0,03
G	3,01	Q	0,02

Die Buchstaben der deutschen Sprache mit Angabe ihrer Häufigkeit (in Prozent)

Bemerkung:
Berücksichtigt man auch den Zwischenraum, so ergeben sich die folgenden Zahlen:

ZR	e	n	s	i	r	a	d	t	u
14.4	14.4	8.7	6.5	6.3	6.2	5.9	5.5	5.4	4.2

Die Bestimmung der Anzahl eines Buchstabens in einem Text ist nicht immer so einfach wie im folgenden englischen Satz:

This pangram tallies five a's, one b, one c, two d's, twenty-eight e's, eight f's, six g's, eight h's, thirteen i's, one j, one k, three l's, two m's, eighteen n's, fifteen o's, two p's, one q, seven r's, twenty-five s's, twenty-two t's, four u's, four v's, nine w's, two x's, four y's, and one z.

Flugverkehr
3‰ der Flugpassagiere warten nach der Landung vergeblich auf ihr Gepäck
(Quelle Coop-Zeitung 16.7.87)

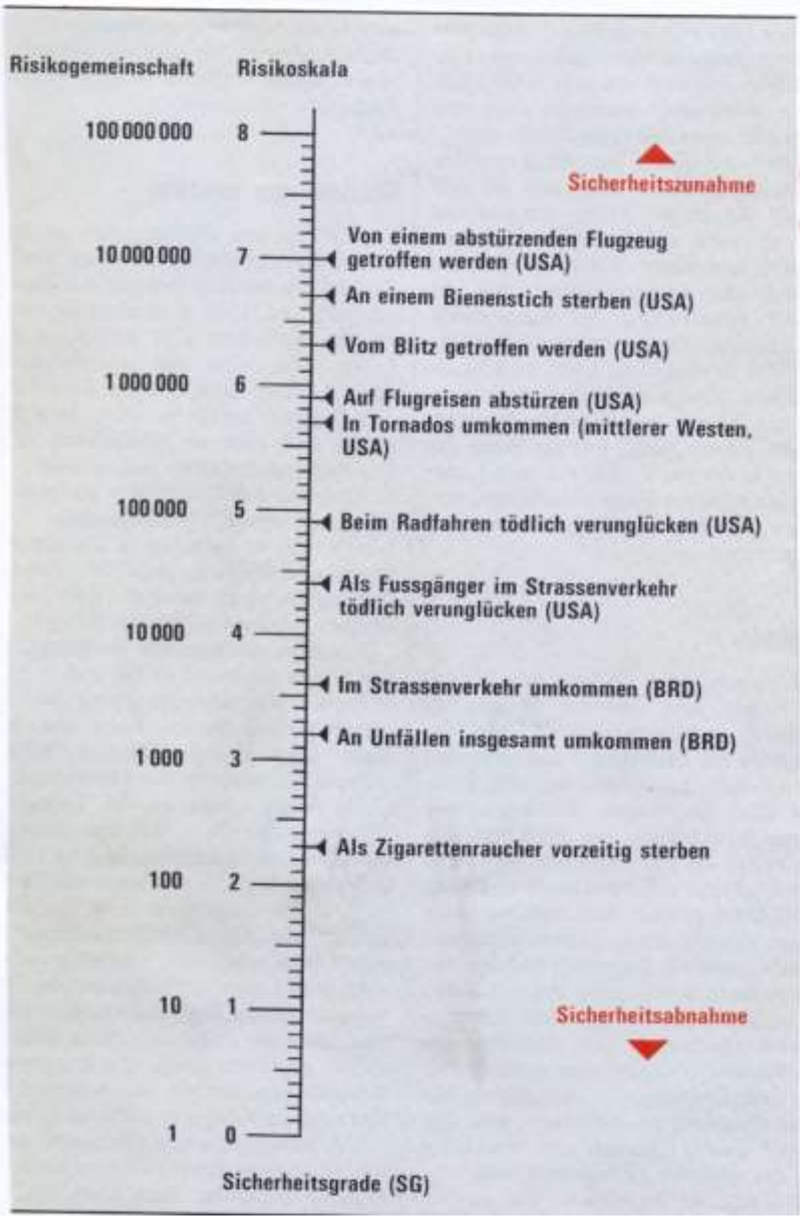
Wetterprognose
Trefferquote 1998 für Wetterbericht: 83% (Quelle: SMA)

Schwarzfahrer
Anteil der Schwarzfahrer in der Stadt Zürich 1999: 2.5% (Quelle: NZZ)

Risiko
Die Chance, innerhalb Jahresfrist vom Blitz getroffen zu werden und deshalb zu sterben, liegt in der Schweiz bei 1 zu 10 000 000.
Die Wahrscheinlichkeit, Vierlinge zur Welt zu bringen, sich mit Aspirin zu vergiften oder durch eine explodierende Flasche Sprudelwasser zu sterben beträgt (je) 1: 1 000 000.
(Quelle TA Magazin).

aus K. Heilmann: Angstkulisse (Roche Magazin Jan. 1985)

Risiko für den einzelnen, innerhalb eines Jahres an einer freiwilligen Aktivität bzw. an einem Ereignis vorzeitig zu sterben



Die Darstellung zeigt vielerlei auf, zum Beispiel dass das Reisen in einem Verkehrsflugzeug weit weniger gefährlich ist, als vielfach angenommen wird. Das Risiko, während eines Linienfluges getötet zu werden, liegt in den USA bei 1:814 000, das heisst, von jeweils 814 000 Flugreisenden kommt einer um. Der Sicherheitsgrad einer Flugreise gemäss dieser Skala beträgt somit 5.9 SG. Das Risiko, in einem Flugzeug ums Leben zu kommen, ist somit ähnlich dem Risiko, im mittleren Westen der USA in einem Tornado zu sterben. Weiter zeigt die Skala, dass das freiwillig in Kauf genommene Risiko des Zigarettenrauchens nicht irgendein Risiko ist, sondern das grösste Einzelrisiko in unserem Leben überhaupt. Der Sicherheitsgrad für Zigarettenrauchen beträgt nur 2.3 SG. In den USA erreicht die Zahl der durch Rauchen verursachten Todesfälle pro Jahr bereits die Halbmillionengrenze. Das Fahren oder Mitfahren in einem Auto ist nicht ohne Risiko; der Sicherheitsgrad für Autofahren beträgt in der BRD 3.6 SG. Das Autofahren ist also im täglichen Leben ein beachtenswertes Risiko; es wird in Industrienationen offenbar von jedermann akzeptiert. Bei Diskussionen über Risiken und deren Inkaufnahme oder Ablehnung sollte man sich am Sicherheitsgrad des Autofahrens orientieren.

Zusammenfassung:
Um Wahrscheinlichkeitsrechnung zu betreiben, muss man wissen, mit welchen Wahrscheinlichkeiten die möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments eintreten.
Nach dem empirischen Gesetz der grossen Zahlen stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten in langen Versuchsfolgen. Diese experimentell gefundenen relativen Häufigkeiten können als Schätzwerte für die i.a. unbekannten „idealen“ Wahrscheinlichkeiten verwendet werden.

Dazu eine Analogie:
Idealwert einer physikalischen Messgrösse (z.B. Lichtgeschwindigkeit) und die mit Fehlern behaftete Messung der Lichtgeschwindigkeit.

Vereinfacht ausgedrückt: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses kann als beste Vorhersage für die relative Häufigkeit in langen Versuchsfolgen aufgefasst werden. Hat ein Ergebnis die Wahrscheinlichkeit p, so bedeutet dies: Wiederholt man den Zufallsversuch n-mal. so tritt das Ergebnis ungefähr np-mal ein.

Wahrscheinlichkeiten können auch subjektive Einschätzungen für das Eintreten eines Ereignisses sein, wie etwa z.B. dass im nächsten Fussballspiel Basel gegen Zürich gewinnt.

Ist kein Grund ersichtlich, warum die verschiedenen Ergebnisse mit unterschiedlichen Häufigkeiten auftreten sollen, dann nimmt man an, dass alle Ergebnisse des Zufallsversuchs gleichwahrscheinlich sind. In diesem Fall spricht man von einem **Laplaceexperiment**
(Pierre Simon de Laplace 1749 - 1827).

Beispiele: Laplacemünze, Laplacewürfel, Ziehen mit Zurücklegen.

Bemerkung;
Es ist zu beachten, dass die Bestimmung dieser sogenannten Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Zufallsexperiments nicht die Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist. Diese lehrt lediglich, wie man aus den gegebenen Wahrscheinlichkeiten neue Wahrscheinlichkeiten berechnen kann.
Bei einem axiomatischen Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse vorgegeben, ohne den Begriff „Wahrscheinlichkeit“ zu definieren. Die Eigenschaften ergeben sich dann aus den Axiomen. Die Aufgabe unbekannte Wahrscheinlichkeiten zu schätzen, wird in der Statistik untersucht.

Näheres dazu im Abschnitt 04 Axiomatischer Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung