

7. Das Geburtstagsproblem, mindestens ein Erfolg, lauter Fehlschläge

Bei Fragestellungen mit „mindestens“ ist es allenfalls zweckmässig, das Gegenereignis zu betrachten.

Aufgabe:

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Laplace-Würfel in vier Würfeln mindestens eine Sechs zu werfen?

A: In 4 Würfeln 1 oder 2 oder 3 oder 4 Sechser werfen.

Gegenereignis \bar{A} : in 4 Würfeln keine Sechs werfen

Wegen $p(\bar{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$ ist $p(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$

Bemerkung:

Das Gegenereignis von A: "mindestens ein Erfolg" ist \bar{A} : "lauter Fehlschläge".

Damit gilt $p(A) = 1 - p(\bar{A})$.

Für welche Wurfzahl n wird die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine Sechs zu werfen, grösser als 95% ?

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0.95 \qquad -\left(\frac{5}{6}\right)^n > -0.05 \quad | \cdot (-1)$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0.05 \qquad \text{logarithmieren}$$

$$n \cdot \lg\left(\frac{5}{6}\right) < \lg 0.05 \qquad \text{durch } \lg\left(\frac{5}{6}\right) < 0 \text{ dividieren}$$

$$n > \frac{\lg 0.05}{\lg\left(\frac{5}{6}\right)} = 16.43 \qquad n \geq 17$$

Für welche Wurfzahl wird die Wahrscheinlichkeit mit zwei Würfeln eine Doppelsechs zu werfen grösser als 95%? Ist die Wurfzahl sechsmal so gross?

$$\text{Lösung: } n > \frac{\lg 0.05}{\lg\left(\frac{35}{36}\right)} = 106.3 \qquad n \geq 107 \qquad \text{Antwort: nein}$$

Diese beiden Probleme eines gewissen **Chevalier de Méré** sind Gegenstand eines Briefwechsels zwischen Pascal und Fermat aus dem Jahr 1654. De Méré war der Meinung, dass beide Gewinnwahrscheinlichkeiten beiden folgenden Spielen gleich gross sein müssten:

Spiel 1: in 4 Würfeln mindestens eine Sechs

Spiel 2: in 24 Würfeln mit 2 Würfeln mindestens eine Doppelsechs

Beim 2. Spiel ist bei jedem Wurf die Anzahl der möglichen Ergebnisse sechsmal grösser, was durch die Versechsfachung der Würfe ausgeglichen werde. Da er beim Spielen in diesem Proportionalitätsdenken enttäuscht wurde, wandte er sich an Pascal.

Das Geburtstagsproblem:

In einem Raum sind n Personen versammelt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 Personen am gleichen Tag Geburtstag haben?

A: mindestens 2 Personen haben am gleichen Tag Geburtstag.

\bar{A} : n Personen haben verschiedene Geburtstage.

Annahme: Das Jahr hat 365 gleichwahrscheinliche Geburtstage.

$$p(\bar{A}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n} \quad p(A) = 1 - p(\bar{A})$$

n	p(A)
23	50.7%
41	90.3%
47	95.4%
57	99.0%

Dazu folgt eine Grafik auf der nächsten Seite (ac).

Das Geburtstagsproblem ist nicht zu verwechseln mit dem folgenden:

In einem Zimmer sind ausser mir noch n Personen anwesend. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Person meinen Geburtstag hat ?

A: mindestens eine von n Personen hat am gleichen Tag Geburtstag wie ich.

\bar{A} : n Personen haben einen anderen Geburtstag als ich.

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n > 0.5$$

$$\left(\frac{364}{365}\right)^n < 0.5 \quad \text{logarithmieren}$$

$$n > \frac{\ln 0.5}{\ln\left(\frac{364}{365}\right)} = 252.7$$

Diese Wahrscheinlichkeit wird für $n = 253$ erstmals $> 50\%$

Die unterschiedlichen Resultate sind plausibel:

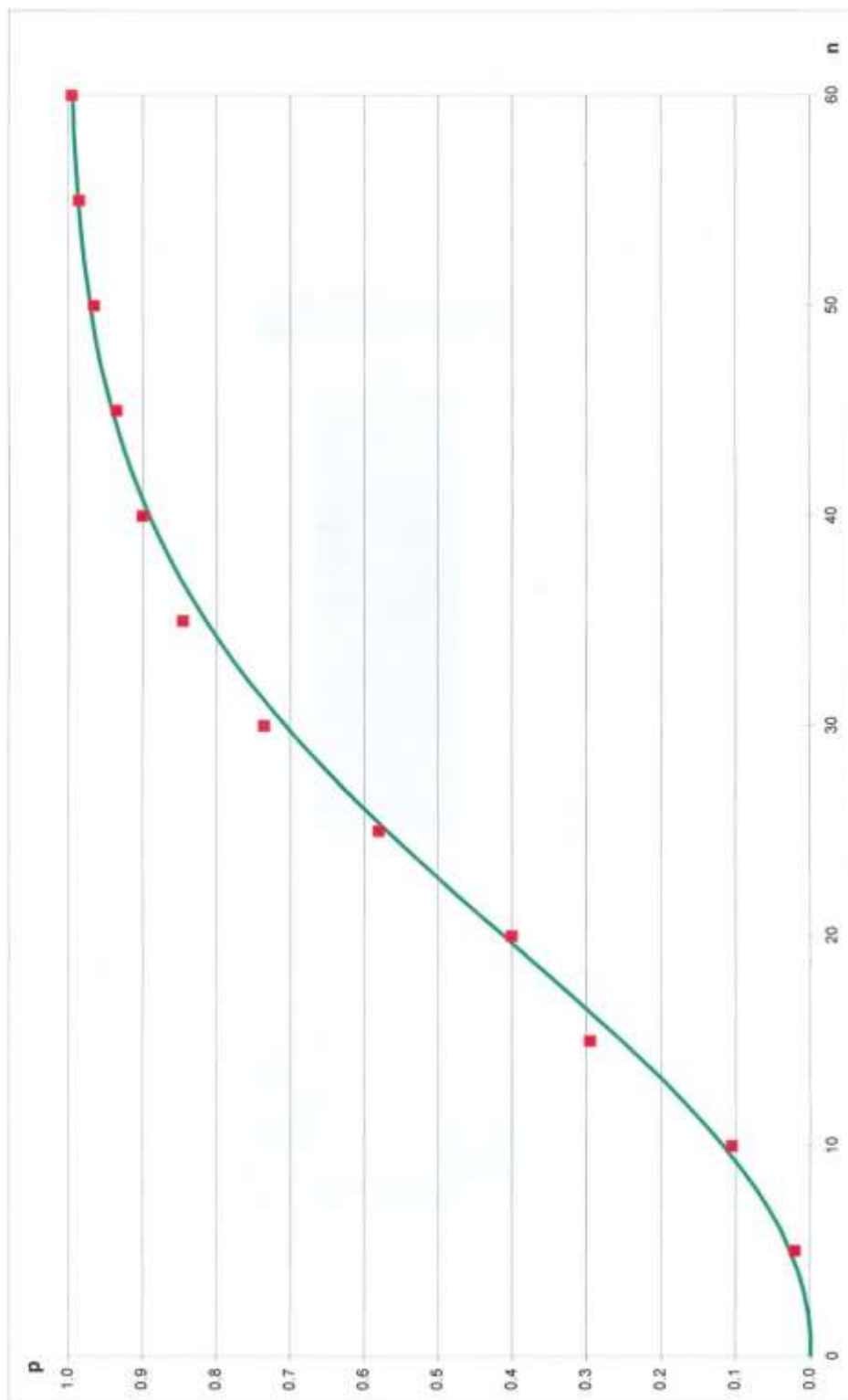
Sind ausser mir 253 Personen anwesend, so sind dies 253 Gelegenheiten für meinen Geburtstag.

Mit $n = 23$ Personen lassen sich $\binom{23}{2} = 253$ Paare bilden. Damit gibt es 253 Gelegenheiten für einen gleichen Geburtstag (an irgendeinem Tag, nicht an meinem Geburtsdatum).

Wahrscheinlichkeit, dass von n Personen mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben

theoretisch

experimentell aus jeweils 200 Versuchen mit n = 5, 10, 15, ... Personen



Übungsaufgabe:

Am ersten Schultag möchte der Schulleiter – falls es unter den Kindern eines gibt, das an diesem Tag Geburtstag hat - dem Kind gratulieren. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 206 Kindern mindestens ein Geburtstagskind ist?

Lösung:

$$1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{206} \approx 0.432$$