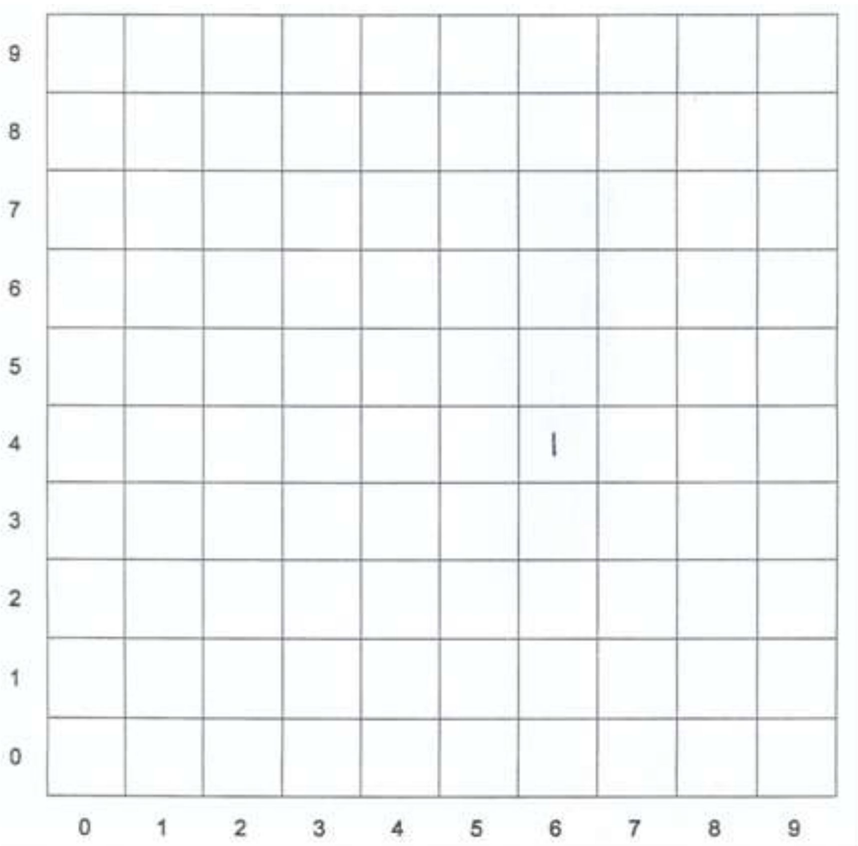
Das Rosinenproblem
(Schülernotiz: Ulrichs Lieblingsaufgabe, er mag jedoch keine Rosinen):

In einen Kuchenteig bringt man 100 Rosinen. Anschliessend bildet man 100 Kuchenstücke. Wieviele Kuchenstücke enthalten keine, genau 1, 2, 3, mehr als 3 Rosinen?

Lösung durch Simulation. Diese Methode heisst auch **Monte-Carlo-Methode**

Der Zufallsprozess wird mit Zufallszahlen „nachgespielt“. Diese Zufallszahlen - besser Pseudozufallszahlen - werden mit sogenannten Zufallsgeneratoren erzeugt, die vorgegebene statistische Tests erfolgreich bestehen.
Jede Schülerin liest die Tabelle der Zufallszahlen in Formeln und Tafeln zweistellig und trägt das Resultat in das betreffende Feld ein (z.B. Feld 64 im folgenden Bild) .



Ein mögliches Resultat ist in der folgenden Graphik dargestellt:

		2		1	3			1	1
1	2	1	2		1				
1	1				1	1		4	1
2				1	2	1	1		3
	2		2	1	1	1	1		
	1	1	2	1		1	2		
1	1				2		2		2
2	2		2	3	2	1	2	1	
4	3	1	1	1	2		1	3	1
	3	1		1	3	1		1	

Die einzelnen Resultate eines Klassenversuchs sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst

Rosinen	4C 14.11.2007				
Anzahl Rosinen	0	1	2	3	> 3
1	32	46	13	8	1
2	35	42	15	5	3
3	39	33	21	5	2
4	38	35	19	6	2
5	**43**	**30**	14	**9**	4
6	42	34	**12**	7	**5**
7	39	30	**25**	4	2
8	37	37	17	7	2
9	**29**	**46**	21	4	0
10	39	32	22	5	2
11	36	36	20	8	**0**
12	38	36	17	7	2
13	40	32	20	5	3
14	35	38	21	4	2
15	39	34	19	5	3
16	36	36	21	6	1
17	33	42	20	**3**	2
18	39	30	24	6	1
19	32	40	22	5	1
Min	29	30	12	3	0
Max	43	46	25	9	5
emp. Mittelwert	**36.9**	**36.3**	**19.1**	**5.7**	**2.0**
Erwartungswert	**36.6**	**37.0**	**18.5**	**6.1**	**1.8**

Rechnerische Lösung:
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Feld genau x der 100 Rosinen enthält, ist

$$P_{100}(x) = \binom{100}{x} \cdot 0.01^{x} \cdot 0.99^{100-x} \quad (*)$$

In der folgenden Tabelle ist der Erwartungswert $100 \cdot P_{100}(x)$ angegeben und zusätzlich Mittelwerte, die sich im Klassenversuch ergeben haben. Die Zahlen geben an, wieviele Felder theoretisch leer bleiben, genau 1, 2, 3 oder mehr als 3 Rosinen enthalten.

x	Anzahl Felder	Erwartungswert
0	36.9	36.6
1	36.3	37.0
2	19.1	18.5
3	5.7	6.1
>3	2.0	1.8

(*)

Wegen $\left(\frac{99}{100}\right)^{100} = (1-\frac{1}{100})^{100} \approx e^{-1} = \frac{1}{e}$ bleiben im Mittel ungefähr $\frac{100}{e} \approx 36.8$ Felder leer.
Dieses Resultat kann folgendermassen für hinreichend grosse n verallgemeinert werden:

Das 1/e-Gesetz
Verteilt man n Objekte zufällig auf n Felder so bleiben ungefähr $\frac{n}{e}$ Felder leer.

Einige Einkleidungen.
Wird ein Rouletterad 37-mal gedreht, so wird die Kugel auf $\frac{37}{e} \approx 13.6$ Felder nicht zu liegen kommen.

Werden die Geburtstage von 365 zufällig ausgewählten Personen erfasst, dann sind $\frac{365}{e} \approx 134.3$ Tage des Jahres ohne Geburtstagskind.

Siehe auch: www.landrat-lucas.de/ → MINT → Stochastik → Präsentationen zu den Vorträgen.

Wendet man das Ergebnis auf das Roulettespiel an, dann bedeutet dies:
Eine Serie von 37 einzelnen Spielen (franz. coups) heisst Rotation. Im Verlaufe einer Rotation werden also etwa $\frac{2}{3}$ der Nummern getroffen, während $\frac{1}{3}$ der Nummern nicht getroffen wird oder genauer:

Gesetz der kleinen Zahl (Bortkiewicz um 1900):

Im Roulette werden im Verlaufe einer Rotation
- 36.9 % der Nummern d.h. 13.5 Zahlen nicht getroffen
- 37.0 % der Nummern d.h. 13.7 Zahlen genau einmal getroffen
- 18.5 % der Nummern d.h. 6.8 Zahlen genau zweimal getroffen
- 6.1.% der Nummern d.h. 2.3 Zahlen mindestens dreimal getroffen
- 1,8.% der Nummern d.h. 0.7 Zahlen mindestens dreimal getroffen

Ideen für weitere Simulationen:

Würfel	Tabelle einstellig lesen, 0, 7, 8, 9 überlesen
Doppelwürfel	zwei Würfelzahlen zu einem Doppelwurf zusammenfassen
Geburtstagsbeispiel	dreistellig lesen und Ziffernfolgen 366, ..., 500, 866, ... 000 überlesen

Problem des Chevalier de Méré

Beispiel für eine Maturaufgabe:

4. (12 Punkte)

4.1 (5 Punkte)

Der Anteil der Raucherinnen und Raucher wird in der Schweiz auf 30% geschätzt.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 20 zufällig ausgewählten Personen
- genau 6 (p_1)
- höchstens 5 (p_2)
- mindestens 4 (p_3) rauchen?

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit p_4, dass unter 100 zufällig ausgewählten Personen zwischen 22 und 38 Personen rauchen?

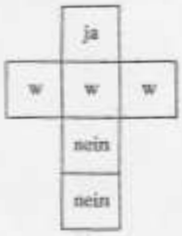
4.2 (2 Punkte)

Bei der Gesundheitsbefragung 1992 von 617 weiblichen Jugendlichen betrug der Anteil der Raucherinnen 15%. Bestimme ein 95%-Vertrauensintervall für den Anteil der Raucherinnen. Bei der nächsten Gesundheitsbefragung 1997 betrug dieser Anteil 24%. Kommentiere dieses Ergebnis.

4.3 (5 Punkte)

Um bei Umfragen über eine heikle Frage wie z.B. Rauchgewohnheiten eine ehrliche Antwort zu erhalten, kann das folgende Verfahren angewendet werden:

Die zu befragende Person erhält einen idealen Würfel, dessen Abwicklung in der Figur dargestellt ist. Die Person wirft den Würfel im Geheimen. Zeigt er "nein", so antwortet die Person mit "nein", unabhängig davon, ob diese Antwort der Wahrheit entspricht oder nicht. Zeigt der Würfel "ja", so antwortet die Person mit "ja" und zeigt er "w", so soll die Person wahrheitsgemäss antworten. Da nur die Person das Ergebnis des Wurfes kennt, bleibt die Wahrheit der Antwort unbekannt, womit die Diskretion gewahrt bleibt. Bei den folgenden zwei Aufgaben wird angenommen, dass sich die befragten Personen an diese Regeln halten.



a) Es sei bekannt, dass in einer bestimmten Personengruppe 20% rauchen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine dieser Personen auf die Frage "Rauchen Sie?" mit "ja" antwortet? (Hinweis Baumdiagramm)

b) In einer anderen Personengruppe werden 600 Personen befragt, ob sie rauchen. 175 Personen antworten mit "ja". Berechne den Anteil p der Rauchenden in dieser Personengruppe.

Lösungen:

4.1. $p_1 = 0.192$, $p_2 = 0.416$, $p_3 = 0.893$, $p_4 = 0.936$
(Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung)

4.2 [12.2% / 17.8%]

4.3 $p(\text{"ja"}) = {}^4/_{15}$ $\quad p = {}^1/_4$